

ΕΣΠΑ 2007-2013, Ε.Π. «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ»
ΔΡΑΣΗ «ΑΡΙΣΤΕΙΑ II»

«Σύμφωνα Ασύρματα Οπτικά Συστήματα ως
Δομικά Στοιχεία για την Υλοποίηση Δικτύων
Οικίας και Επαγγελματικών Χώρων Επόμενης
Γενιάς, (COWS)»

Κωδικός Έργου : 3525

COWS

Παραδοτέο:	Π3.2
Τίτλος:	Τεχνικές ΜΙΜΟ
Ημερομηνία:	11/1/2015
Επιμέρους Δράση:	Π.Ε. 3
Υπεύθυνος Σύνταξης:	Θωμάς Καμαλάκης, Βασίλειος Δαλάκας, Παναγιώτης Κανάκης, Γεωργία Δέδε, Κατερίνα Μαργαρίτη
Είδος:	Τεχνική Αναφορά



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



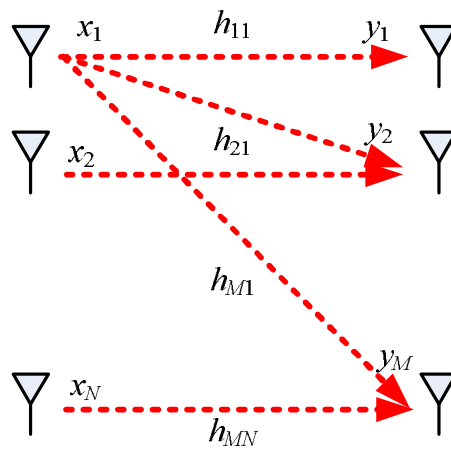
1. Περιεχόμενα

1. Περιεχόμενα	2
2. Σκοπός του παραδοτέου	3
3. Χωρητικότητα ενός MIMO συστήματος	3
3.1 Το βασικό μοντέλο ενός MIMO συστήματος.....	3
3.2 Υπολογισμός της Χωρητικότητας του MIMO συστήματος.....	5
4. Χωρητικότητα MIMO οπτικών ασύρματων	9
4.1 Συστήματα IM/DD	9
4.2 Κέρδος Ποικιλομορφίας IM/DD	11
4.3 Σύμφωνα Ασύρματα Συστήματα	13
4.4 Κέρδος ποικιλομορφίας σύμφωνων συστημάτων.....	16
5. Κώδικες χώρου/χρόνου	17
5.1 Κώδικες Alamouti	17
5.2 Συστήματα IM/DD με STBC.....	20
5.3 Σύμφωνα Ασύρματα Συστήματα με STBC	21
5.4 Επιδόσεις Συστημάτων IM/DD με STBC	21
5.5 Επιδόσεις Συστημάτων Σύμφωνων Ασύρματων Συστημάτων με STBC.....	23
6. Κώδικες Επανάληψης (Repetition Coding)	24
7. Επιδόσεις ενός ρεαλιστικού συστήματος	26
7.1 Συστήματα άμεσης φώρασης με ένα δέκτη	28
7.2 Συστήματα με πολλαπλούς δέκτες	31
7.3 Επίδραση των εμποδίων	34
7.4 Σύμφωνη Φώραση	35
8. Συμπεράσματα	36

2. Σκοπός του παραδοτέου

Στο παρόν παραδοτέο θα παρουσιάσουμε τα βασικά στοιχεία ενός οπτικού ασύρματου συστήματος που χρησιμοποιεί σύμφωνη φάραση (coherent optical wireless system - COWS) και τεχνικές MIMO για την αύξηση της ρυθμαπόδοσης του. Θα υπολογίσουμε θεωρητικά την χωρητικότητα του συστήματος MIMO τόσο για τα συστήματα άμεσης φάρασης όσο και για τα συστήματα σύμφωνης φάρασης και θα αναλύσουμε την ειδοποιό διαφορά μεταξύ των δύο περιπτώσεων. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την κωδικοποίηση χώρου/χρόνου (space-time block coding - STBC) και την βελτίωση των επιδόσεων που μπορεί να επιφέρει στα οπτικά ασύρματα συστήματα. Τέλος θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα που αφορούν τις επιδόσεις των MIMO συστημάτων σε μία πιο ρεαλιστική ζεύξη COWS, λαμβάνοντας υπόψη την θέση των πομποδεκτών μέσα στο δωμάτιο, τον προσανατολισμό τους και άλλες παραμέτρους.

3. Χωρητικότητα ενός MIMO συστήματος



Εικόνα 1: Η βασική αρχιτεκτονική ενός συστήματος MIMO

3.1 Το βασικό μοντέλο ενός MIMO συστήματος

Στην Εικόνα 1 δείχνουμε τη βασική αρχιτεκτονική ενός MIMO συστήματος που χρησιμοποιεί πολλές κεραιές εκπομπής και πολλές κεραιές λήψης. Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο αυτή η αρχιτεκτονική μπορεί να επιφέρει κάποια βελτίωση στις επιδόσεις, σε σχέση με ένα απλό σύστημα που χρησιμοποιεί μία κεραιά στον πομπό και μία κεραιά στο δέκτη. Τα θεωρητικά αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε σε αυτήν την ενότητα, βασίζονται κυρίως στις εργασίες των Foschini [1] και Telatar [2] οι οποίοι έδωσαν όρια για την χωρητικότητα των συστημάτων MIMO.

Όπως δείχνουμε και στην εν λόγω εικόνα οι πομποί εκπέμπουν τα σήματα x_1, \dots, x_N και οι δέκτες λαμβάνουν τα σήματα y_1, \dots, y_M . Ορίζουμε τα διανύσματα εκπομπής \mathbf{x} και λήψης \mathbf{y} ως εξής:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_M \end{bmatrix} \quad (2)$$

Θεωρούμε ότι τα σήματα x_1, \dots, x_N είναι όμοια κατανομημένες στατιστικά ανεξάρτητες Gaussian τυχαίες¹ μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και ορίζουμε τον πίνακα αυτοσυσχέτισης

$$\mathbf{R}_{xx} = \langle \mathbf{xx}^H \rangle \quad (3)$$

όπου ο δείκτης H συμβολίζει το ερμιτιανό συζυγές. Είναι φανερό ότι η συνολική ισχύς εκπομπής είναι ίση με:

$$P = \langle |x_1|^2 \rangle + \dots + \langle |x_N|^2 \rangle = \text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) \quad (4)$$

όπου με $\text{tr}(\mathbf{R}_{xx})$ έχουμε συμβολίσει το ίχνος του πίνακα \mathbf{R}_{xx} . Στην περίπτωση όπου η ισχύς εκπομπής είναι η ίδια για κάθε κεραία θα έχουμε:

$$\langle |x_1|^2 \rangle = \dots = \langle |x_N|^2 \rangle = \frac{P_T}{N} \quad (5)$$

όπου P_T είναι η συνολική ισχύς εκπομπής. Δεδομένου ότι έχουμε υποθέσει ότι τα σήματα μας είναι στατιστικά ανεξάρτητα, έπεται ότι:

$$\langle x_p x_q^* \rangle = 0, \quad p \neq q \quad (6)$$

οπότε εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει:

$$\mathbf{R}_{xx} = \frac{P_T}{N} \mathbf{I}_N \quad (7)$$

όπου με \mathbf{I}_N έχουμε αναπαραστήσει τον μοναδιαίο πίνακα $N \times N$.

Στη συνέχεια προχωράμε με την μαθηματική περιγραφή του ασύρματου καναλιού. Όπως είδαμε και στο Π1.1, το κανάλι μπορεί υπό προϋποθέσεις να θεωρηθεί σταθερό με την συχνότητα (frequency flat) και επομένως χωρίς μνήμη. Αυτό βέβαια δεν ισχύει απαραίτητα στα κλασικά ασύρματα κανάλια στις μικροκυματικές συχνότητες όπου τα φαινόμενα διαλείψεων μπορεί να είναι αρκετά έντονα και επομένως να έχουμε φαινόμενα μνήμης στο ασύρματο κανάλι. Στην περίπτωση μας, η κατευθυντική φύση του συστήματος που οφείλεται στο ότι ο τοπικός ταλαντωτής, ως ένα σημείο, φιλτράρει ανεπιθύμητες συνιστώσες του σήματος που οφείλονται σε φαινόμενα πολλαπλών ανακλάσεων. Στην περίπτωση αυτή, το κανάλι περιγράφεται από έναν πίνακα \mathbf{H} με στοιχεία h_{ij} ο οποίος συνδέει τα σήματα εισόδου με τα σήματα εξόδου. Απουσία προσθετικού θορύβου μπορούμε να γράψουμε,

$$y_i = \sum_{j=1}^N h_{ij} x_j \quad (8)$$

Σε ένα πραγματικό σύστημα οι συντελεστές h_{ij} περιλαμβάνουν την εξασθένιση του καναλιού την ηλεκτρονική ενίσχυση στον πομπό ή στον δέκτη και άλλους παράγοντες που τελικά καθορίζουν τον συντελεστή με τον οποίο το σήμα κάθε κεραίας εκπομπής εμφανίζεται σε κάθε κεραία λήψης. Στην περίπτωση όπου υπάρχουν κινούμενα εμπόδια μέσα στο δωμάτιο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{H} είναι τυχαίες μεταβλητές. Ωστόσο θα πρέπει να υπόκεινται σε κάποιου είδους συνθήκες κανονικοποίησης όπως για παράδειγμα η παρακάτω,

$$\langle |h_{p1}|^2 \rangle + \dots + \langle |h_{pN}|^2 \rangle = \left\langle \sum_{q=1}^M |h_{pq}|^2 \right\rangle = N \quad (9)$$

Η παραπάνω συνθήκη σημαίνει ότι η αναμενόμενη ισχύς που λαμβάνει κάθε κεραία είναι η ίδια. Πράγματι η ισχύς του λαμβανομένου σήματος είναι:

$$\langle |y_p|^2 \rangle = \sum_{q=1}^M \langle |h_{pq}|^2 \rangle \langle |x_q|^2 \rangle = \frac{P_T}{N} \sum_{q=1}^M \langle |h_{pq}|^2 \rangle = N \frac{P_T}{N} = P_T \quad (10)$$

¹ Η συνθήκη αυτή δεν είναι απαραίτητη αλλά οδηγεί όπως θα δούμε και παρακάτω στην μεγιστοποίηση της χωρητικότητας του συστήματος.

όποτε έχουμε θεωρήσει ότι η εσωτερική ενίσχυση κάθε κεραίας είναι τέτοια ώστε να λαμβάνεται στην έξοδο του δέκτη ισχύς ίση² με P_T . Φυσικά θα μπορούσαμε να επιλέξουμε και ένα πιο ρεαλιστικό τρόπο κανονικοποίησης κάτι που θα κάνουμε στις παρακάτω παραγράφους.

Παρουσία προσθετικού θορύβου θα έχουμε:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (11)$$

όπου το διάνυσμα \mathbf{n} περιλαμβάνει τις συνιστώσες του θορύβου στην έξοδο κάθε κεραίας λήψης,

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \dots \\ n_M \end{bmatrix} \quad (12)$$

Θεωρούμε ότι οι συνιστώσες του θορύβου είναι στατιστικά ανεξάρτητες Gaussian τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και ίση διακύμανση οπότε η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης θα καθορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{R}_m = \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^H \rangle = \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (13)$$

όπου σ^2 είναι η ισχύς του θορύβου σε κάθε μία από τις κεραίες. Παρατηρούμε ότι η (13) συνεπάγεται ότι η ισχύς του θορύβου είναι ίση για κάθε κεραία λήψης. Μπορούμε να ορίσουμε το πηλίκο σήμα προς θόρυβο σε κάθε κεραία ως:

$$\gamma = \text{SNR} = \frac{P_T}{\sigma^2} \quad (14)$$

όπου εξαιτίας της (10) έχουμε υποθέσει ότι η ισχύς του σήματος σε κάθε κεραία ισούται με την ισχύ εκπομπής.

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τον πίνακα αυτοσυσχέτισης των σημάτων λήψης \mathbf{y}

$$\mathbf{R}_{yy} = \langle \mathbf{y}^H \mathbf{y} \rangle = \langle (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n})(\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n})^H \rangle = \mathbf{H}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}^H \quad (15)$$

Τέλος είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι σύμφωνα με την (10) θα έχουμε για την συνολική ισχύ λήψης,

$$P_R = \left\langle \sum_{p=1}^M |y_p|^2 \right\rangle = \langle \text{tr}(\mathbf{R}_{yy}) \rangle = MP_T \quad (16)$$

δηλαδή η συνολική ισχύς που λαμβάνεται είναι ίση με το γινόμενο της συνολικής ισχύος εκπομπής με τον αριθμό των κεραίων λήψης.

3.2 Υπολογισμός της Χωρητικότητας του MIMO συστήματος

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της χωρητικότητας ενός MIMO συστήματος χρησιμοποιώντας το μοντέλο της ενότητας 3.1. Θα θεωρήσουμε ότι ο πίνακας \mathbf{H} είναι γνωστός στον δέκτη αλλά όχι στον πομπό. Σύμφωνα με το θεώρημα της ανάλυσης πινάκων σε ιδιάζουσες μορφές (singular value decomposition – SVD), οποιοσδήποτε πίνακας \mathbf{H} με διαστάσεις $M \times N$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H \quad (17)$$

όπου οι πίνακες \mathbf{U} και \mathbf{V} είναι μοναδιαίοι (unitary) και έχουν διαστάσεις $M \times M$ και $N \times N$ αντίστοιχα ενώ ο πίνακας \mathbf{D} είναι διαγώνιος με διαστάσεις $M \times N$ και τα διαγώνια του στοιχεία καθορίζονται από τις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ ο οποίος είναι θετικά ορισμένος και επομένως έχει θετικές πραγματικές ιδιοτιμές. Αντικαθιστώντας την (17) στην (11) θα έχουμε:

² Πρόκειται για μία εκ των πιθανών συνθηκών κανονικοποίησης που μπορούμε να επιλέξουμε η οποία διευκολύνει τις μαθηματικές πράξεις και έχει να κάνει με το κέρδος των ηλεκτρονικών ενισχυτών που χρησιμοποιούνται. Η ισχύς του θορύβου στο δέκτη συνδέεται άμεσα με την κανονικοποίηση που κάνουμε και για αυτό στη συνέχεια θα επιλέξουμε διαφορετικές συνθήκες κανονικοποίησης όταν θα ασχοληθούμε με πιο πρακτικά συστήματα.

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (18)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τα μετασχηματισμένα σήματα,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}^H \mathbf{y} \quad (19)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}^H \mathbf{x} \quad (20)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{U}^H \mathbf{n} \quad (21)$$

οπότε θα έχουμε,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (22)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{I}_N$ και $\mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{I}_M$ εφόσον οι πίνακες \mathbf{U} και \mathbf{V} είναι μοναδιαίοι. Γνωρίζουμε επίσης ότι ο αριθμός των μη μηδενικών ιδιοτιμών λ_p του πίνακα $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ είναι ίσος με την τάξη του πίνακα r η οποία πάντα θα είναι μικρότερη του $R = \min(M, N)$. Επομένως θα έχουμε από την (22),

$$Y_p = \sqrt{\lambda_p} X_p + N_p, \quad 1 \leq p \leq r \quad (23)$$

$$Y_p = N_p, \quad r+1 \leq p \leq M \quad (24)$$

Σύμφωνα με τις (23)-(24) από τα ληφθέντα M σήματα μας ενδιαφέρουν μόνο τα r από αυτά επειδή τα υπόλοιπα δεν σχετίζονται καθόλου με τα σήματα εκπομπής και ισούνται με μία συνιστώσα θορύβου. Τα r αυτά σήματα Y_p με $1 \leq p \leq r$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και κάθε ένα εξαρτάται από ένα και μόνο διαφορετικό κάθε φορά σήμα εισόδου X_p .

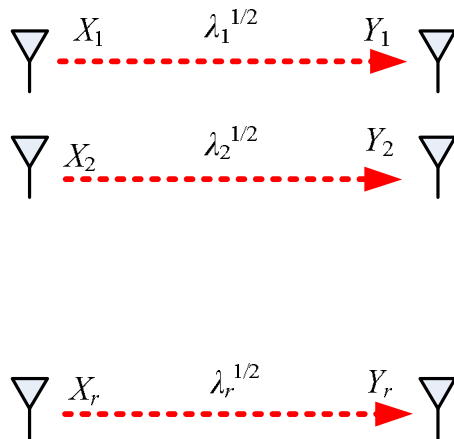
Μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των μετασχηματισμένων σημάτων εισόδου,

$$\mathbf{R}_{XX} = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle = \langle \mathbf{V}\mathbf{x}\mathbf{x}^H\mathbf{V}^H \rangle = \mathbf{V} \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^H \rangle \mathbf{V}^H = \frac{P_T}{N} \mathbf{I}_N \quad (25)$$

Η (23) έχει ως συνέπεια ότι τα μετασχηματισμένα σήματα είναι στατιστικά ανεξάρτητα και έχουν την ίδια ισχύ με τα αρχικά σήματα. Επίσης μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του μετασχηματισμένου θορύβου είναι,

$$\mathbf{R}_{NN} = \langle \mathbf{N}\mathbf{N}^H \rangle = \langle \mathbf{U}\mathbf{n}\mathbf{n}^H\mathbf{U}^H \rangle = \mathbf{U} \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^H \rangle \mathbf{U}^H = \sigma^2 \mathbf{I}_N \quad (26)$$

Στην Εικόνα 2 δείχνουμε ένα ισοδύναμο σχήμα για το MIMO σύστημα όπως προκύπτει από τις εξισώσεις (23)-(24). Παρατηρούμε ότι οι παράγοντες $\sqrt{\lambda_p}$ αποτελούν το κέρδος των ισοδύναμων ανεξάρτητων καναλιών.



Εικόνα 2: Το ισοδύναμο ενός συστήματος MIMO

Εφόσον τα ισοδύναμα κανάλια είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, έπεται ότι η συνολική χωρητικότητα τους είναι το άθροισμα των επιμέρους χωρητικοτήτων. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Shannon βρίσκουμε ότι:

$$C = W \sum_{p=1}^r \log_2 \left(1 + \frac{\lambda_p P_T}{N \sigma^2} \right) \quad (27)$$

όπου αντικαταστήσαμε την ισχύ του σήματος σε κάθε κανάλι ίση με $\lambda_i P_T / N$ σε συμφωνία με την εξίσωση (23). Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να συμπεριλάβουμε στο άθροισμα και τις μηδενικές ιδιοτιμές του πίνακα και να γράψουμε την χωρητικότητα ως προς το σύνολο των ιδιοτιμών του l_p ,

$$C = W \sum_{p=1}^M \log_2 \left(1 + \frac{l_p P_T}{N \sigma^2} \right) \quad (28)$$

Μπορούμε συσχετίσουμε την χωρητικότητα απευθείας με τον πίνακα του καναλιού \mathbf{H} . Αν ορίσουμε τον πίνακα \mathbf{Q} ως

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}\mathbf{H}^H \quad (29)$$

τότε η εξίσωση ιδιοτιμών του πίνακα \mathbf{Q} γράφεται

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}) = 0 \quad (30)$$

όπου το $p(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα \mathbf{Q} . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ισούται με το γινόμενο

$$p(\lambda) = \prod_{p=1}^M (\lambda - l_p) \quad (31)$$

Εξισώνοντας την (30) με την (31) λαμβάνουμε,

$$\log_2 \det(\lambda \mathbf{I}_M - \mathbf{Q}) = \log_2 \left\{ \prod_{p=1}^M (\lambda - l_p) \right\} \quad (32)$$

ή εναλλακτικά,

$$\log_2 \det \left(\mathbf{I}_M - \frac{1}{\lambda} \mathbf{Q} \right) = \log_2 \left\{ \prod_{p=1}^M \left(1 - \frac{l_p}{\lambda} \right) \right\} = \sum_{p=1}^M \log_2 \left(1 - \frac{l_p}{\lambda} \right) \quad (33)$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε $\lambda = -N\sigma^2/P_T$, τότε θα λάβουμε:

$$C = W \sum_{p=1}^M \log_2 \left(1 + \frac{l_p P_T}{N \sigma^2} \right) = W \log_2 \det \left(\mathbf{I}_M + \frac{P_T}{N \sigma^2} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right) \quad (34)$$

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου χρησιμοποιούμε μία κεραία εκπομπής ($N=1$) και μία κεραία λήψης ($M=1$). Τότε αν υποθέσουμε ότι ο συντελεστής του καναλιού είναι ίσος με την μονάδα ($h_{11}=1$) τότε η (34) γράφεται ως εξής:

$$C_{\text{siso}} = W \log_2 \left(1 + \frac{P_T}{\sigma^2} \right) \quad (35)$$

δηλαδή λαμβάνουμε τον κλασικό τύπο του Shannon στην περίπτωση της κλασικής ζεύξης. Τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε $M=N$ κεραίες λήψης και N κεραίες εκπομπής και πάλι οι συντελεστές των καναλιών είναι μονάδα,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

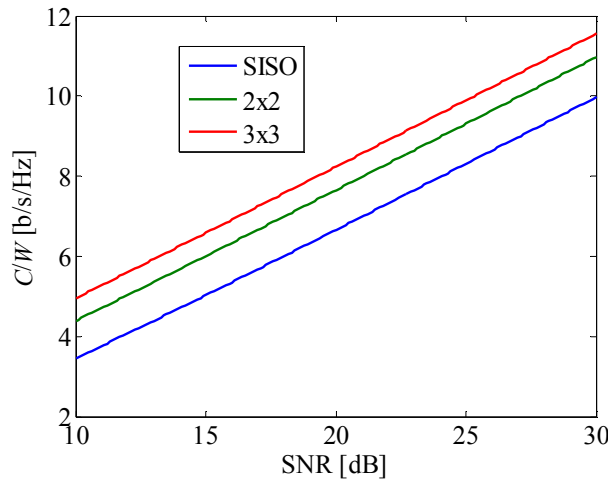
Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι όλα τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{Q}=\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ είναι ίσα με N και οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι όλες ίσες με μηδέν εκτός από μία η οποία ισούται με $\lambda_1=N^2$. Επομένως υπάρχει μόνο ένα ισοδύναμο κανάλι στην Εικόνα 1 το οποίο έχει συντελεστή $\sqrt{\lambda_1} = N$ οπότε επί της ουσίας έχουμε ένα κέρδος ισχύος ίσο με λ_1 και η χωρητικότητα γράφεται

$$C_{MIMO} = W \log_2 \left(1 + N \frac{P_T}{\sigma^2} \right) \quad (37)$$

για μεγάλες τιμές του πηλίκου σήματος προς θόρυβο $P_T/\sigma^2 \gg 1$ θα έχουμε

$$\frac{C_{MIMO} - C_{SISO}}{W} = \log_2 \left(1 + N \frac{P_T}{\sigma^2} \right) - \log_2 \left(1 + \frac{P_T}{\sigma^2} \right) \cong \log_2 \left(N \frac{P_T}{\sigma^2} \right) - \log_2 \left(\frac{P_T}{\sigma^2} \right) = \log_2 N \quad (38)$$

δηλαδή βλέπουμε ότι έχουμε μία λογαριθμική αύξηση στην χωρητικότητα εξαιτίας της ύπαρξης πολλαπλών κεραιών λήψης και εκπομπής. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συνολική ισχύ εκπομπής είναι η ίδια και για τα δύο συστήματα επομένως το κέρδος αυτό οφείλεται καθαρά στην ποικιλομορφία (diversity) που έχουμε στον χώρο.



Εικόνα 3: Κανονικοποιημένη χωρητικότητα C/W υπολογισμένη για διαφορετικούς αριθμούς πομποδεκτών.

Στην Εικόνα 3 παρουσιάζουμε την κανονικοποιημένη χωρητικότητα C/W για $N=1$, $N=2$ και $N=3$ για διαφορετικούς λόγους σήματος πηλίκου σήματος-προς-θόρυβο $\text{SNR}=P_T/\sigma^2$.

Στα παραπάνω υπολογίσαμε την χωρητικότητα του MIMO συστήματος σε μία ειδική περίπτωση. Γενικότερα αν υποθέσουμε ότι τα σήματα εξόδου \mathbf{y} των κεραιών συνδέεται με τα σήματα εισόδου \mathbf{x} σύμφωνα με την (11) και τα σήματα \mathbf{x} έχουν μηδενική μέση τιμή και ένα πίνακα συσχέτισης $\mathbf{R}_{xx}=\langle \mathbf{x}\mathbf{x}^H \rangle$ ο οποίος όμως δεν είναι απαραίτητα της μορφής (7), τότε έπεται ότι η χωρητικότητα μεγιστοποιείται όταν τα \mathbf{x} είναι Gaussian μεταβλητές ενώ η μέγιστη χωρητικότητα είναι ίση με [3]:

$$C = W \log_2 \det \left(\mathbf{I}_M + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}^H \right) \quad (39)$$

ενώ η ισχύς εκπομπής και ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του θορύβου δίδονται από τις σχέσεις:

$$P_T = \text{tr} \{ \mathbf{R}_{xx} \} \quad (40)$$

$$\mathbf{R}_m = \langle \mathbf{nn}^H \rangle = \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (41)$$

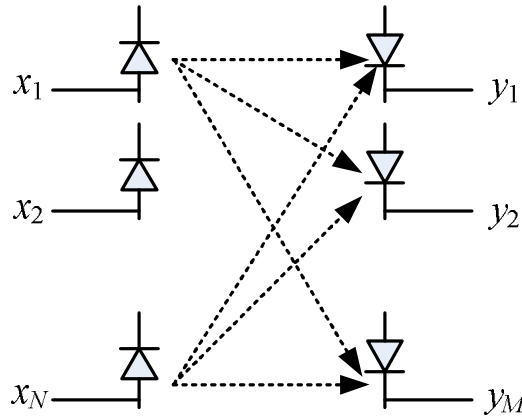
Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν την γενίκευση του θεωρήματος του Shannon [4] στην περίπτωση όπου έχουμε πολλές κεραιές εκπομπής και πολλές κεραιές λήψης.

4. Χωρητικότητα MIMO οπτικών ασύρματων

4.1 Συστήματα IM/DD

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμόσουμε την παραπάνω θεωρία στην περίπτωση των ασύρματων οπτικών συστημάτων. Στους υπολογισμούς μας, θα πρέπει τώρα να λάβουμε υπόψη την οπτική ισχύ μετάδοσης αλλά και το γεγονός ότι η φώραση των σημάτων γίνεται στο ηλεκτρονικό επίπεδο. Επομένως μας ενδιαφέρει η σχέση που συνδέει τα ηλεκτρονικά σήματα που διαμορφώνουν τους οπτικούς πομπούς και πως αυτά γίνονται αντληπτά στους οπτικούς δέκτες.

Ξεκινάμε με τα συστήματα άμεσης φώρασης όπου μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές h_{pq} σύμφωνα και με το παραδοτέο Π1.1. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση αυτή χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή τα σήματα που εκπέμπονται είναι σήματα οπτικής ισχύος. Για να δούμε την ουσιαστική διαφορά μεταξύ των δύο περιπτώσεων ξεκινάμε από την Εικόνα 4. Οι πομποί στην περίπτωση μας είναι είτε δίοδοι LASER είτε δίοδοι LED που οδηγούνται από τα σήματα x_1, \dots, x_N . Στην πιο απλή περίπτωση τα σήματα αυτά είναι ηλεκτρικά ρεύματα τα οποία μετατρέπονται σε οπτική ισχύ στις αντίστοιχες διόδους βάσει μίας γραμμικής σχέσης ρεύματος-οπτικής ισχύος³ οπότε η οπτική ισχύς που εκπέμπεται από τις διόδους είναι $P_1=Kx_1, \dots, P_N=Kx_N$.



Εικόνα 4: Μία MIMO αρχιτεκτονική στην περίπτωση ασύρματων συστημάτων άμεσης φώρασης

Οι δέκτες μετατρέπουν την οπτική ισχύ σε ηλεκτρικό ρεύματα οπότε τα σήματα λήψης δίνονται από την σχέση

$$y_p = RP_{rp} \quad (42)$$

όπου P_{rp} είναι η συνολική ισχύς που λαμβάνεται στον p δέκτη. Η ισχύς αυτή είναι το άθροισμα των ισχύων που φτάνουν από κάθε πομπό⁴,

$$P_{rp} = \sum_{q=1}^N P_{pq} \quad (43)$$

όπου P_{pq} η ισχύς που φτάνει στο δέκτη p από τον πομπό q . Η ισχύς αυτή υπολογίζεται από τον ισολογισμό ισχύος όπως είδαμε και στο Π1.1. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι

³ Πρόκειται για την ιδανική περίπτωση. Η χαρακτηριστική ρεύματος/οπτικής ισχύος μία LED ή ενός LASER μπορεί μόνο κατά προσέγγιση να θεωρηθεί γραμμική.

⁴ Η εξίσωση αυτή δεν λαμβάνει υπόψη της φαινόμενα συμβολής μεταξύ των οπτικών ακτίνων κάτι που σίγουρα συμβαίνει στην περίπτωση πομπών LED που εκπέμπουν ασύμφωνη ακτινοβολία. Στην περίπτωση πομπών LASER στην ουσία θεωρούμε αρκετά κατευθυντικούς πομπούς και δέκτες οι οποίοι μπορούν να ξεχωρίσουν την ακτινοβολία που έρχεται από τις διάφορες κατευθύνσεις και επομένως το ρεύμα εξαρτάται από το άθροισμα της ισχύος. Εναλλακτικά οι πομποί θα μπορούσαν να εκπέμπουν σε διαφορετικό μήκος κύματος οπότε κάθε δέκτης λαμβάνει το άθροισμα δύο οπτικών πεδίων E_1 και E_2 με διαφορετικές φέρουσες συχνότητες. Το ρεύμα που θα παράγεται στο δέκτη σε αυτή την περίπτωση θα είναι ίση με $i=R\{|E_1|^2+|E_2|^2+2E_1E_2\cos(\Delta\omega t)\}$ όπου $\Delta\omega$ είναι η συχνοτική διαφορά των δύο κυμάτων. Η τρίτη συνιστώσα φιλτράρεται αυτόματα από τον δέκτη και επομένως μένουν μόνο οι δύο πρώτες.

$$P_{pq} = c_{pq} P_q \quad (44)$$

όπου οι συντελεστές c_{pq} εξαρτώνται από την θέση και τον προσανατολισμό των πομποδεκτών, την ενεργό επιφάνεια του δέκτη και το διάγραμμα ακτινοβολίας του πομπού. Στην περίπτωση ενός συστήματος διαμόρφωσης έντασης/άμεσης φώρασης (intensity modulation / direct detection - IM/DD) μπορούμε να γράψουμε την ισχύ εκπομπής ως:

$$P_q = x_q \frac{P_T}{N} \quad (45)$$

όπου αν θεωρήσουμε ότι $0 \leq x_q \leq 1$ προκύπτει ότι P_T είναι η μέγιστη συνολική οπτική ισχύς εκπομπής. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η (45) υπονοεί ότι κάθε πομπός εκπέμπει με την ίδια μέγιστη οπτική ισχύ.

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις τελικά έχουμε:

$$y_p = \frac{R P_T}{N} \sum_{q=1}^N c_{pq} x_q \quad (46)$$

Θα πρέπει στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι στην πράξη θα πρέπει $x_q \geq 0$ επειδή κατά την άμεση διαμόρφωση, τα ρεύματα που οδηγούν τις διόδους στον πομπό θα πρέπει να είναι θετικά. Σε σχέση με το απλοποιημένο επομένως μοντέλο που δείχνουμε στην Εικόνα 4, η εξίσωση (46) συνδέει το ρεύμα στις διόδους εκπομπής με το ρεύμα στις διόδους λήψης. Δεδομένου ότι το θεώρημα της χωρητικότητας εφαρμόζεται όταν τα σήματα στον πομπό έχουν μηδενική μέση τιμή μπορούμε να αφαιρέσουμε από τα σήματα x_q την DC τους συνιστώσα άλλωστε η οποία δεν μεταφέρει καμία πληροφορία και απλώς δημιουργεί ένα DC ρεύμα στους δέκτες. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να θέσουμε $\langle x_p \rangle = 0$ και ότι ο πίνακας του καναλιού είναι

$$\mathbf{H} = \frac{R K P_T}{N} \mathbf{C} \quad (47)$$

Στην εξίσωση (47) ο πίνακας \mathbf{C} περιέχει τα κέρδη ισχύος του καναλιού c_{pq} του οπτικού ασύρματου καναλιού. Σύμφωνα με την (39) η χωρητικότητα του καναλιού είναι:

$$C = W \log_2 \det \left(\mathbf{I}_M + \frac{R^2 P_T^2}{N^2 \sigma^2} \mathbf{C} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{C}^H \right) \quad (48)$$

ενώ αν υποθέσουμε ότι τα σύμβολα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα τότε:

$$\mathbf{R}_{xx} = \langle x_q^2 \rangle \mathbf{I}_N \quad (49)$$

και επομένως:

$$C = W \log_2 \det \left(\mathbf{I}_M + \frac{R^2 P_T^2}{N^2 \sigma^2} \langle x_q^2 \rangle \mathbf{C} \mathbf{C}^H \right) \quad (50)$$

Θα πρέπει στο σημείο αυτό να τονίσουμε την διαφορά μεταξύ των συστημάτων IM/DD από τα κλασικά ασύρματα συστήματα: τα σήματα λήψης στον δέκτη είναι απευθείας ανάλογα της οπτικής ισχύος εκπομπής P_T και επομένως στην εξίσωση της χωρητικότητας (50) εμφανίζεται ο λόγος $(P_T/N)^2$ και όχι ο P_T/N όπως ισχύει στην (34). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το ρεύμα στον δέκτη είναι απευθείας ανάλογο της οπτικής ισχύος και όχι του πεδίου και έχει σημαντικές επιπτώσεις στις επιδόσεις των MIMO τεχνικών στα ασύρματα οπτικά συστήματα IM/DD.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να συγκρίνουμε ένα σύστημα $N \times N$ με ένα σύστημα 1×1 στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούμε IM/DD. Αν υποθέσουμε ότι τα επιμέρους κανάλια έχουν παρόμοιο συντελεστή κέρδους, δηλαδή $c_{pq} \approx h$ τότε όλα τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{C} \mathbf{C}^H$ θα είναι ίσα με h^2 ενώ σύμφωνα με τα όσα είδαμε και στην ενότητα 3.2, οι ιδιοτιμές του θα είναι όλες ίσες με μηδέν εκτός από μία που θα ισούται με $h^2 N^2$. Επομένως η χωρητικότητα του καναλιού γράφεται:

$$C = W \log_2 \det \left(\mathbf{I}_M + \frac{R^2 P_T^2 h^2}{\sigma^2} \langle x_q^2 \rangle \right) \quad (51)$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη του αριθμού των πομποδεκτών N κάτι που σημαίνει ότι δεν υπάρχει κέρδος από την χρήση αρχιτεκτονικών MIMO $N \times N$ στην περίπτωση IM/DD συστημάτων με ντετερμινιστικά κέρδη καναλιού c_{pq} τα οποία είναι σχεδόν ίσα.

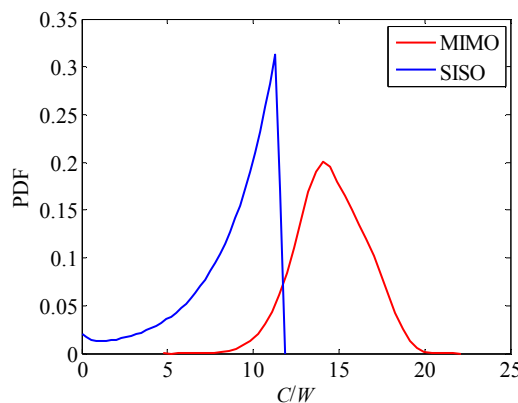
4.2 Κέρδος Ποικιλομορφίας IM/DD

Οι τεχνικές MIMO είναι ωστόσο χρήσιμες όταν οι συντελεστές των καναλιών διέπονται από μία τυχαιότητα η οποία στα κλασικά ασύρματα συστήματα οφείλεται σε διαλείψεις του καναλιού και σε φαινόμενα σκίασης [6]. Στα συστήματα IM/DD τα φαινόμενα διαλείψεως δεν υφίστανται εξαιτίας της μεγάλης επιφάνειας του δέκτη [5]. Ωστόσο φαινόμενα σκίασης είναι σημαντικά δεδομένου ότι η οπτική επαφή μεταξύ πομπού δέκτη μπορεί εύκολα να διακοπεί εξαιτίας κινούμενων εμποδίων (π.χ. άνθρωποι που μετακινούνται σε ένα δωμάτιο, κτλ).

Για να διαπιστώσουμε το κέρδος από τις MIMO τεχνικές στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε αρχικά ότι οι συντελεστές του καναλιού c_{pq} είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα $[0, 1)$. Στην περίπτωση αυτή, η χωρητικότητα εξαρτάται από τον συντελεστή

$$\gamma = \frac{R^2 P_T^2 \langle x_q^2 \rangle}{\sigma^2} \quad (52)$$

ο οποίος εύκολα διαπιστώνουμε ότι αντιστοιχεί στο συνολικό ηλεκτρικό SNR εκπομπής απουσία τυχαιότητας.

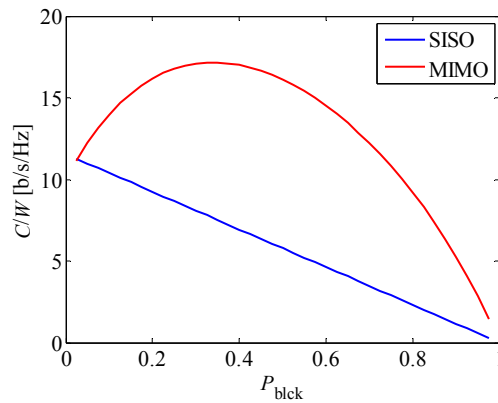


Εικόνα 5: Πυκνότητα πιθανότητας της χωρητικότητας ενός συστήματος 1×1 και ενός συστήματος 3×3 στην περίπτωση όπου οι συντελεστές του καναλιού είναι τυχαίες μεταβλητές.

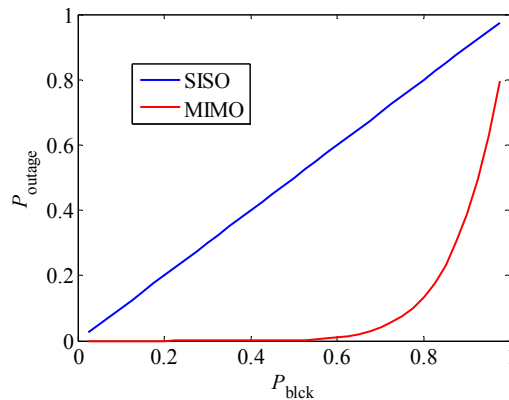
Στην Εικόνα 5 δείχνουμε την πυκνότητα πιθανότητας της κανονικοποιημένης χωρητικότητας C/W που υπολογίζουμε όταν το συνολικό SNR εκπομπής είναι $\gamma=15\text{dB}$ στην περίπτωση ενός συστήματος 1×1 και 3×3 . Παρατηρούμε ότι στη δεύτερη περίπτωση η χωρητικότητα μπορεί να λάβει τιμές μέχρι και 20bits/s/Hz ενώ στην περίπτωση του συστήματος 1×1 , η χωρητικότητα δεν ξεπερνάει τα 13bits/s/Hz . Η μέση χωρητικότητα για τα δύο συστήματα είναι ίση με 14.5 bits/s/Hz στην περίπτωση του 3×3 και 8.75 bits/s/Hz στην περίπτωση του 1×1 οπότε αντιλαμβανόμαστε το μεγάλο κέρδος που επιφέρουν οι τεχνικές MIMO στην περίπτωση όπου οι συντελεστές του καναλιού διέπονται από την παραπάνω τυχαιότητα.

Στην συνέχεια αναλύουμε την περίπτωση όπου οι συντελεστές του καναλιού είναι ίσοι με την μονάδα με πιθανότητα $1-P_{\text{blk}}$ και ίσοι με μηδέν με πιθανότητα P_{blk} όπου P_{blk} είναι η πιθανότητα διακοπής της σύνδεσης (π.χ. εξαιτίας κινούμενων εμποδίων, κτλ). Θεωρούμε, όπως και πριν ότι οι επιμέρους συντελεστές των καναλιών c_{pq} είναι στατιστικά ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Το σενάριο αυτό είναι καλύτερα προσαρμοσμένο στην περίπτωση κατευθυντικών υπέρυθρων ή ορατών ζεύξεων όπου η παρουσία ενός

εμποδίου μεταξύ ενός πομπού ή ενός δέκτη μπορεί να προκαλέσει ολική διακοπή της μεταξύ τους σύνδεσης και όχι απλά εξασθένηση της οπτικής ισχύος που φτάνει στον δέκτη⁵.



Εικόνα 6: Μέση χωρητικότητα ενός συστήματος IM/DD 1×1 και ενός συστήματος IM/DD 3×3 σε συνάρτηση με την πιθανότητα διακοπής της ζεύξης P_{block} .



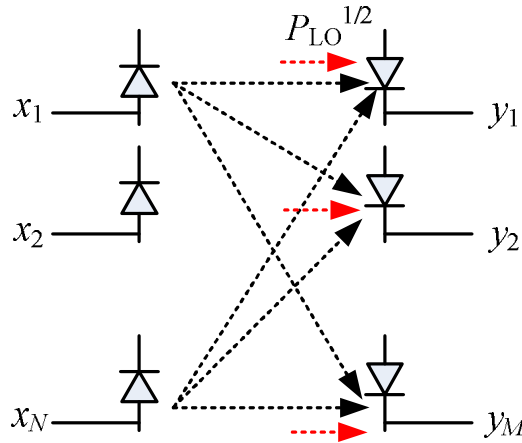
Εικόνα 7: Πιθανότητα ολικής απώλειας της επικοινωνίας P_{outage} ενός συστήματος IM/DD 1×1 και ενός συστήματος IM/DD 3×3 σε συνάρτηση με την πιθανότητα διακοπής της ζεύξης P_{block} .

Στην Εικόνα 6 έχουμε παραστήσει γραφικά την μέση κανονικοποιημένη χωρητικότητα του συστήματος η οποία υπολογίζεται από 10^6 πραγματοποιήσεις του πίνακα \mathbf{C} σύμφωνα με την προαναφερόμενη στατιστική που θεωρήσαμε. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του συστήματος 1×1 έχουμε γραμμική μείωση της χωρητικότητας με την παράμετρο P_{block} , ενώ η κατάσταση είναι σημαντικά διαφορετική στην περίπτωση του συστήματος 3×3 όπου η χωρητικότητα αρχικά αυξάνει με την P_{block} και στην συνέχεια αρχίζει να μειώνεται φτάνοντας την τιμή της χωρητικότητας του συστήματος 1×1. Αυτή η αξιοπερίεργη συμπεριφορά οφείλεται στις ιδιότητες του πίνακα \mathbf{C} και των ιδιοτιμών όταν ισχύει η εν λόγω στατιστική για τα στοιχεία του.

Στην Εικόνα 7 δείχνουμε την πιθανότητα ολικής απώλειας της επικοινωνίας $P_{\text{outage}}=P(C=0)$ που ορίζεται ως η πιθανότητα η χωρητικότητα του συστήματος να είναι ίση με μηδέν (οπότε δεν υπάρχει καμία επικοινωνία μεταξύ του πομπού και του δέκτη). Παρατηρούμε ότι το σύστημα 3×3 παρουσιάζει πολύ ευνοϊκή συμπεριφορά καθώς η πιθανότητα P_{outage} παραμένει μικρή για πιθανότητες διακοπής των επιμέρους συνδέσεων ακόμα και 70% ενώ αντίθετα, η πιθανότητα P_{outage} αυξάνει γραμμικά με την πιθανότητα P_{block} .

⁵ Η παραπάνω συμπεριφορά οφείλεται στο μικρό μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος που θεωρούμε που έχει ως αποτέλεσμα την παρεμπόδιση της ζεύξης εξαιτίας εμποδίων σε αντίθεση με τα σήματα σε ραδιοσυχνότητες όπου το μήκος κύματος είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο κάτι που επιτρέπει την διάδοση του μέσα από τοίχους και άλλα παρόμοια εμπόδια.

4.3 Σύμφωνα Ασύρματα Συστήματα



Εικόνα 8: Μία MIMO αρχιτεκτονική στην περίπτωση ασύρματων συστημάτων άμεσης φάρασης

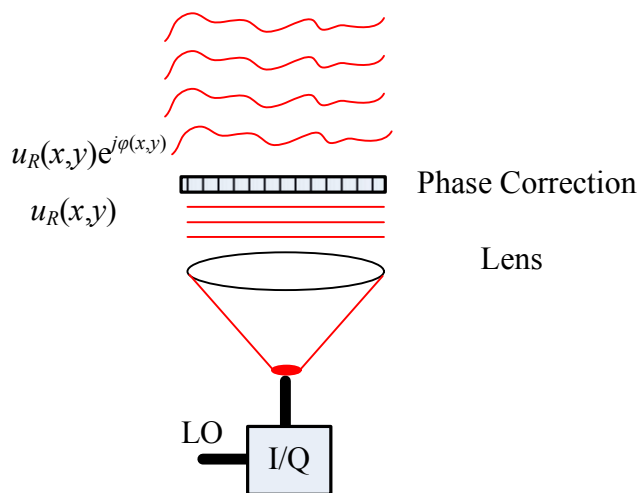
Στην περίπτωση των σύμφωνων ασύρματων συστημάτων που χρησιμοποιούν τεχνικές MIMO φαίνεται στην Εικόνα 8. Η διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση είναι ότι λαμβάνει χώρα μίξη με το σήμα του τοπικού ταλαντωτή. Το φωτόρευμα που δημιουργείται στον p δέκτη από τον q πομπό είναι ίσο με

$$y_{pq} = Rx_q \sqrt{\frac{P_T P_{LO}}{N}} d_{pq} \tag{53}$$

όπου

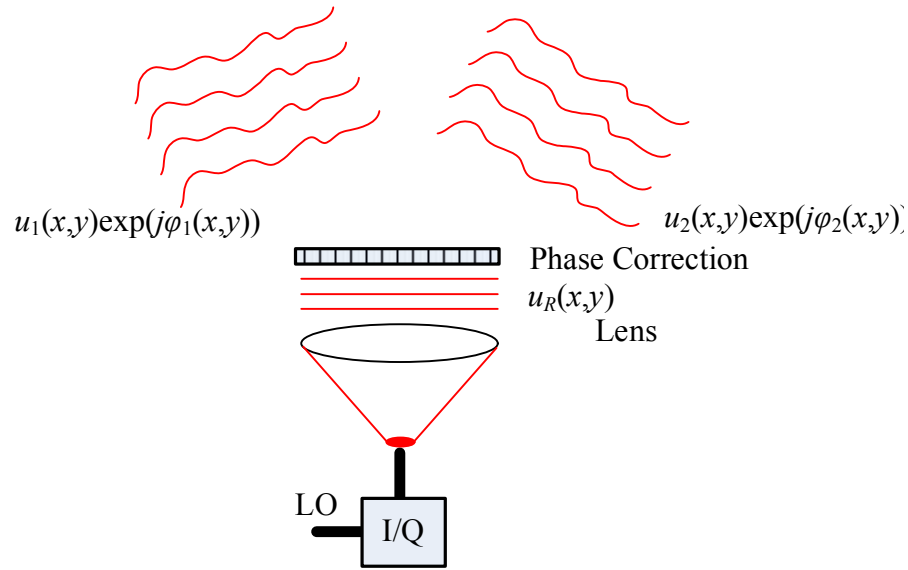
$$d_{pq} = \sqrt{c_{pq}} e^{j\phi_{pq}} \tag{54}$$

είναι οι συντελεστές του σύμφωνου καναλιού και ϕ_{pq} η διαφορά φάσης στην οποία υπόκειται το σήμα μεταξύ του πομπού και του δέκτη. Στην περίπτωση αυτή τα σήματα x_q μπορεί να είναι και μιγαδικά⁶. Το συνολικό ρεύμα εξαρτάται από την διαφορά φάσης μεταξύ των οπτικών σημάτων. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η διόρθωση της χωρικής μεταβολής της φάσης (σύμφωνα με όσα είδαμε στο Π1.1) και ιδιαίτερα με τον αριθμό των στοιχείων διόρθωσης φάσης που θεωρούνται σε κάθε δέκτη.



Εικόνα 9: Διόρθωση φάσης του προσπίπτοντος κύματος

⁶ Σύμφωνα με την ανάλυση του δέκτη IQ που είχαμε δει στο Π1.1, στα σύμφωνα ασύρματα συστήματα έχουμε την δυνατότητα να αντιλαμβανόμαστε τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος του σήματος στο δέκτη ακριβώς επειδή στα συστήματα αυτά διατηρείται η φάση του συστήματος.



Εικόνα 10: Ένας οπτικός σύμφωνος δέκτης που λαμβάνει σήματα από δύο εκπομπούς.

Στην Εικόνα 9 έχουμε παρουσιάσει το κλασικό σύστημα διόρθωσης φάσης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα σύμφωνα ασύρματα οπτικά συστήματα. Σε μία αρκετά χονδροειδή προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η φάση του πεδίου ομογενοποιείται και επομένως αν το πεδίο που προσπίπτει στην είσοδο του στοιχείου που πραγματοποιεί την διόρθωση είναι $u_R(x,y)\exp(j\varphi(x,y))$ τότε στην ιδανική περίπτωση το πεδίο που έχουμε στην έξοδο του στοιχείου διόρθωσης είναι απλά $u_R(x,y)$.

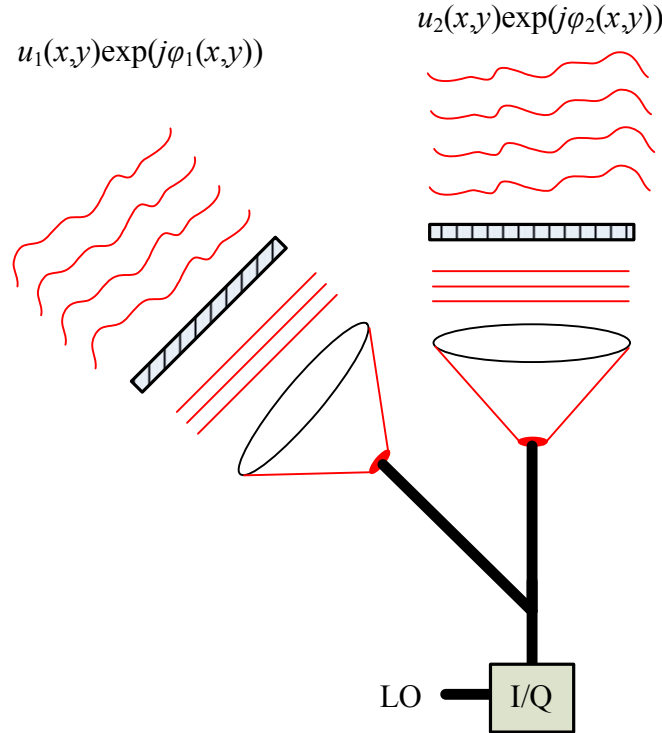
Η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη στην περίπτωση όπου ο δέκτης λαμβάνει σήματα από δύο πομπούς οπότε το συνολικό στην είσοδο του στοιχείου διόρθωσης φάσης είναι:

$$u_R(x,y)e^{j\varphi(x,y)} = u_1(x,y)e^{j\varphi_1(x,y)} + u_2(x,y)e^{j\varphi_2(x,y)} \quad (55)$$

όπου $u_i(x,y)$ και $\varphi_i(x,y)$ είναι το πλάτος και η φάση του σήματος από τον πομπό i . Παρατηρούμε επομένως ότι το σήμα εισόδου προκύπτει από την υπέρθεση των σημάτων των δύο πομπών και ότι ακόμα και αν υποθέσουμε τέλεια διόρθωση της φάσης, το τελικό πεδίο στην έξοδο του διορθωτή φάσης θα είναι:

$$u_R = |u_1 e^{j\varphi_1} + u_2 e^{j\varphi_2}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (56)$$

Η εξίσωση (56) καταδεικνύει ότι ακόμα και στην ιδανική περίπτωση, το συνολικό πεδίο θα παρουσιάζει αυξομειώσεις έντασης οι οποίες εξαρτώνται από την διαφορά φάσης των πεδίων των σημάτων στην είσοδο του στοιχείου που διορθώνει την φάση. Καθίσταται επομένως φανερό στην περίπτωση όπου συμπίπτουν δύο οπτικά σήματα στο ίδιο στοιχείο διόρθωσης φάσης, στην έξοδο του δεν σχηματίζεται ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο αρχικών σημάτων όπως απαιτεί η (11) και επομένως δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την προηγούμενη θεωρία για να υπολογίσουμε την χωρητικότητα.



Εικόνα 11: Ένας οπτικός σύμφωνος δέκτης που λαμβάνει σήματα από δύο εκπομπούς και χρησιμοποιεί δύο συστήματα διόρθωσης φάσης.

Στην Εικόνα 11 έχουμε παρουσιάσει ένα οπτικό δέκτη ο οποίος λαμβάνει σήματα από δύο διαφορετικές διευθύνσεις και χρησιμοποιεί διαφορετικά συστήματα διόρθωσης φάσης για κάθε ένα από αυτά. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει η εξίσωση (11) και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία της ενότητας 3.2 για τον υπολογισμό της χωρητικότητας. Οι εξισώσεις της ενότητας 4.2 πρέπει να τροποποιηθούν ώστε να λαμβάνεται υπόψη η (53) και όχι η (46). Ο τελικός τύπος της χωρητικότητας θα είναι:

$$C = W \log_2 \det \left(\mathbf{I}_M + \frac{R^2 P_T P_{LO}}{N \sigma^2} \langle x_q^2 \rangle \mathbf{E} \mathbf{E}^H \right) \quad (57)$$

όπου πλέον ο πίνακας \mathbf{E} περιέχει ως στοιχεία τους συντελεστές $\sqrt{c_{pq}}$ και όχι τους c_{pq} . Παρατηρούμε ότι στον παρανομαστή της (57) υπάρχει ο όρος N και όχι ο όρος N^2 κάτι σημαίνει ότι η περίπτωση των ασύρματων οπτικών συστημάτων σύμφωνης φάρασης έχει αρκετά κοινά στοιχεία με τα κλασικά ραδιοσυστήματα. Ωστόσο θα πρέπει να σημειωθεί ότι θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν N^2 το πλήθος συστήματα διόρθωσης φάσης για να επιτευχθεί το κέρδος αυτό. Επίσης κάθε δέκτης χρησιμοποιεί την ίδια ισχύ τοπικού ταλαντωτή P_{LO} και η συνολική ισχύς που δαπανάται σε κάθε δέκτη είναι $N P_{LO}$ και αυξάνει επομένως με τον αριθμό των δεκτών. Αν επιθυμούσαμε να διατηρήσουμε την συνολική ισχύ των τοπικών ταλαντωτών σε κάθε δέκτη ίση με την ισχύ του συστήματος 1×1 δηλαδή με P_{LO} έπεται ότι η σχέση (57) γράφεται:

$$C = W \log_2 \det \left(\mathbf{I}_M + \frac{R^2 P_T P_{LO}}{\sigma^2} \langle x_q^2 \rangle \mathbf{E} \mathbf{E}^H \right) \quad (58)$$

εφόσον πρέπει να αντικαταστήσουμε την ισχύ P_{LO} με P_{LO}/N στην (57). Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει κέρδος από την χρήση MIMO τεχνικών. Ωστόσο θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι όπως είδαμε και στο Π1.1, η ισχύς του θορύβου σ^2 μπορεί να εξαρτάται σε κάποιο βαθμό και από την ισχύ του τοπικού ταλαντωτή οπότε το κατά πόσον ή όχι θα έχουμε κέρδος από τις MIMO τεχνικές στην περίπτωση

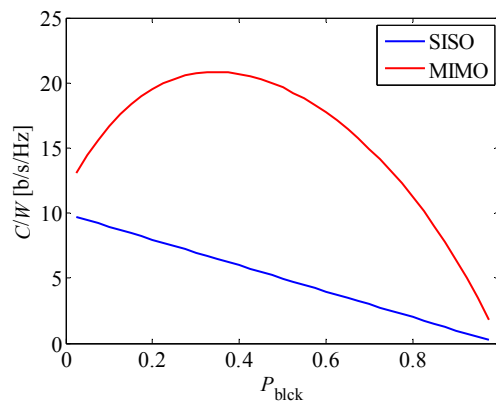
αυτή θα πρέπει να διερευνηθεί περαιτέρω λαμβάνοντας υπόψη την οπτική ισχύ περιβάλλοντος και την σχέση της με την ισχύ του τοπικού ταλαντωτή⁷.

4.4 Κέρδος ποικιλομορφίας σύμφωνων συστημάτων

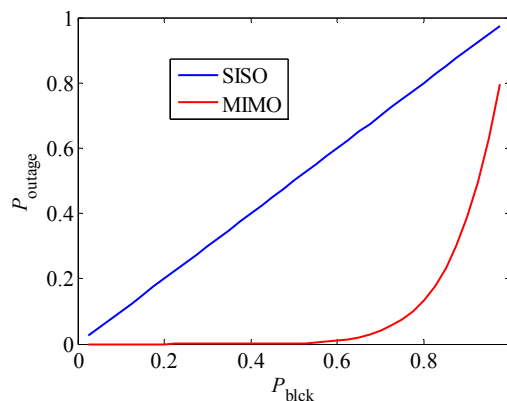
Αν υποθέσουμε ότι τα επιμέρους κανάλια έχουν παρόμοιο συντελεστή κέρδους, δηλαδή $c_{pq} \cong h$ τότε όλα τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{E}\mathbf{E}^H$ θα είναι ίσα με h ενώ σύμφωνα με τα όσα είδαμε και στην ενότητα 3.2, οι ιδιοτιμές του θα είναι όλες ίσες με μηδέν εκτός από μία που θα ισούται με hN^2 . Επομένως η χωρητικότητα του καναλιού γράφεται:

$$C = W \log_2 \det \left(\mathbf{I}_M + \frac{R^2 P_T P_{LO} h N}{\sigma^2} \langle x_q^2 \rangle \right) \quad (59)$$

οπότε υπάρχει ένα σημαντικό κέρδος ποικιλομορφίας ακόμα και αν οι συντελεστές του καναλιού είναι ντετερμινιστικοί.



Εικόνα 12: Μέση χωρητικότητα ενός σύμφωνου συστήματος 1×1 και ενός σύμφωνου συστήματος 3×3 σε συνάρτηση με την πιθανότητα διακοπής της ζεύξης P_{block} .



Εικόνα 13: Πιθανότητα ολικής απώλειας της επικοινωνίας P_{outage} ενός σύμφωνου συστήματος 1×1 και ενός σύμφωνου συστήματος 3×3 σε συνάρτηση με την πιθανότητα διακοπής της ζεύξης P_{block} .

Όπως και στην περίπτωση των IM/DD συστημάτων, έχει ενδιαφέρον να υπολογίσουμε την χωρητικότητα του συστήματος και την πιθανότητα ολικής απώλειας της επικοινωνίας συναρτήσει της πιθανότητας διακοπής της σύνδεσης. Στην Εικόνα 12 και στην Εικόνα 13 αντίστοιχα έχουμε παραστήσει τα δύο αυτά μεγέθη για την περίπτωση των σύμφωνων συστημάτων για $P_{LO}=1\text{mW}$ διατηρώντας τις ίδιες παραμέτρους

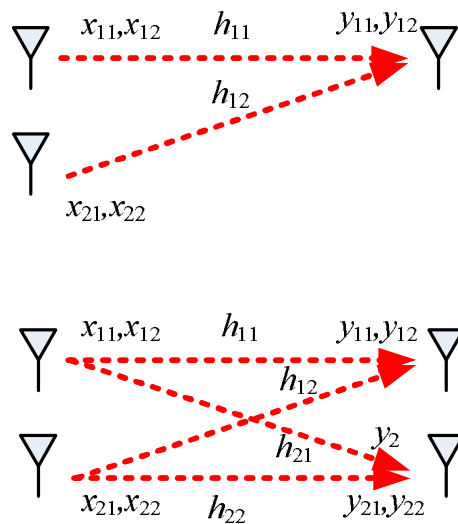
⁷ Τόσο η ισχύς του οπτικού ταλαντωτή P_{LO}/N όσο και του περιβάλλοντος θορύβου P_n συνεισφέρουν την ισχύ του θορύβου shot, $\sigma_{\text{shot}}^2 = 2qR(P_n + P_{LO}/N)B$. Επομένως αν χρησιμοποιήσουμε ένα στενό οπτικό φίλτρο και δεν έχουμε συνθήκες έντονης φωτεινότητας τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P_n \ll P_{LO}$ και τελικά $\sigma_{\text{shot}}^2 \cong 2qBRP_{LO}/N$. Αν ο θερμικός θόρυβος είναι πολύ μικρός τότε ο συνολικός θόρυβος θα προσεγγίζεται πολύ καλά από τον θόρυβο shot και επομένως $\sigma^2 \cong 2qBRP_{LO}/N$ οπότε στην σχέση (58) ο συντελεστής N θα επανεμφανιστεί στον αριθμητή.

όπως και με την περίπτωση των IM/DD συστημάτων. Όσο αφορά την μέση χωρητικότητα, η συμπεριφορά είναι παρόμοια, ωστόσο για $P_{\text{bck}} \rightarrow 0$ η χωρητικότητα του συστήματος 3×3 είναι μεγαλύτερη από αυτή του συστήματος 1×1 εξαιτίας του παράγοντα N στον παρανομαστή αντί του N^2 .

5. Κώδικες χώρου/χρόνου

Στις προηγούμενες ενότητες υπολογίσαμε την χωρητικότητα των MIMO συστημάτων τόσο στην περίπτωση της σύμφωνης φώρασης, όσο και στην περίπτωση του IM/DD. Η χωρητικότητα σχετίζεται με την μέγιστη φασματική απόδοση C/W και τον μέγιστο ρυθμό μετάδοσης πληροφορίας με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος. Πρόκειται για ένα θεωρητικό μέγεθος το οποίο μπορεί να μην επιτυγχάνεται στην πράξη και επομένως θα πρέπει να αναλύσουμε τις επιδόσεις του συστήματος στην περίπτωση πιο πρακτικών τρόπων μετάδοσης – θα πρέπει δηλαδή να θεωρήσουμε συγκεκριμένους τρόπους με τους οποίους μεταδίδουμε την πληροφορία και επομένως επιλέγουμε τα σήματα εκπομπής x_1, \dots, x_N . Στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε πιο πρακτικά να εκμεταλλευτούμε τις δυνατότητες των MIMO συστημάτων που βασίζεται στους κώδικες μπλοκ χώρου/χρόνου (space time block coding – STBC).

5.1 Κώδικες Alamouti



Εικόνα 14: Συστήματα 2×1 και 2×2 που χρησιμοποιούν κωδικοποίηση χώρου/χρόνου.

Στην Εικόνα 14 βλέπουμε δύο MIMO συστήματα 2×1 και 2×2 που χρησιμοποιούν κωδικοποίηση χώρου/χρόνου. Οι πομποί μεταδίδουν τις ακολουθίες $\{x_{11}, x_{12}, \dots\}$ και $\{x_{21}, x_{22}, \dots\}$ όπου με x_{pq} συμβολίζουμε το σήμα που εκπέμπεται από τον πομπό p την χρονική στιγμή q . Ο τρόπος με τον οποίο εκπέμπονται τα σήματα καθορίζεται από το σχήμα κωδικοποίησης. Το πρώτο ιστορικά και ίσως πιο απλό σχήμα κωδικοποίησης είναι ο κώδικας του Alamouti. Συγκεκριμένα την πρώτη χρονική στιγμή ($q=1$) οι δύο πομποί στέλνουν τα σήματα x_1 και x_2 αντίστοιχα, ενώ την δεύτερη χρονική στιγμή ($q=2$) στέλνουν τα σύμβολα $-x_2^*$ και x_1^* αντίστοιχα. Ο πίνακας 2×2 πίνακας $\mathbf{X}=[x_{pq}]$ ονομάζεται πίνακας του κώδικα διαίρεσης χώρου/χρόνου και δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{bmatrix} \quad (60)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο πίνακας του κώδικα έχει την εξής ιδιότητα:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H = \begin{bmatrix} |x_1|^2 + |x_2|^2 & 0 \\ 0 & |x_1|^2 + |x_2|^2 \end{bmatrix} = (|x_1|^2 + |x_2|^2) \mathbf{I}_2 \quad (61)$$

Στην περίπτωση του συστήματος 2×1 στην Εικόνα 14, αν θεωρήσουμε ότι τα κέρδη του καναλιού δεν αλλάζουν κατά την διάρκεια των δύο διαδοχικών μεταδόσεων των σημάτων, τότε το σήμα στο δέκτη θα είναι:

$$y_{11} = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + n_{11} \quad (62)$$

$$y_{12} = -h_{11}x_2^* + h_{12}x_1^* + n_{12} \quad (63)$$

όπου n_{11} και n_{12} είναι οι συνιστώσες του θορύβου που θεωρούνται ανεξάρτητες Gaussian μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση ίση με σ^2 . Οι εξισώσεις (62)-(63) γράφονται και ως εξής:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12}^* \end{bmatrix} \quad (64)$$

ή ισοδύναμα σε μορφή πίνακα θα έχουμε:

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (65)$$

όπου οι πίνακες ορίζονται ως εξής:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12}^* \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12}^* \end{bmatrix} \quad (68)$$

Ο πίνακας \mathbf{M} έχει την ιδιότητα:

$$\mathbf{M}^H \mathbf{M} = \begin{bmatrix} h_{11}^* & h_{12} \\ h_{12}^* & -h_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* \end{bmatrix} = (|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2) \mathbf{I}_2 \quad (69)$$

Αν ορίσουμε τα βοηθητικά σήματα:

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}^H \mathbf{y} \quad (70)$$

τότε θα έχουμε:

$$\mathbf{z} = (|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2) \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (71)$$

όπου οι μετασχηματισμένες συνιστώσες του θορύβου \mathbf{e} δίνονται από την σχέση:

$$\mathbf{e} = \mathbf{M}^H \mathbf{n} \quad (72)$$

Όσο αφορά την συνιστώσα του θορύβου μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\mathbf{n}\mathbf{n}^H = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11}^* & n_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |n_{11}|^2 & n_{11}n_{12} \\ n_{12}^*n_{11} & |n_{12}|^2 \end{bmatrix} \quad (73)$$

και επομένως:

$$\langle \mathbf{n}\mathbf{n}^H \rangle = \sigma^2 \mathbf{I}_2 \quad (74)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι

$$\sigma^2 = \langle |n_{11}|^2 \rangle = \langle |n_{12}|^2 \rangle \quad (75)$$

Για τις μετασχηματισμένες συνιστώσες του θορύβου θα έχουμε:

$$\langle \mathbf{e}\mathbf{e}^H \rangle = \langle \mathbf{M}^H (\mathbf{n}\mathbf{n}^H) \mathbf{M} \rangle = \sigma^2 (|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2) \mathbf{I}_2 \quad (76)$$

Σύμφωνα με την (71) τα βοηθητικά σήματα \mathbf{z} προκύπτουν από τα αρχικά σήματα \mathbf{x} πολλαπλασιασμένα με τον παράγοντα $|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2$ στα οποία προστίθεται ένα διάνυσμα θορύβου \mathbf{e} με ισχύ $\sigma^2(|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2)$. Δεδομένου ότι η αποκωδικοποίηση των συμβόλων μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την κάθε συνιστώσα του \mathbf{z} ανεξάρτητα από την άλλη, εύκολα βρίσκουμε ότι το πηλίκο σήμα-προς-θόρυβο είναι

$$\text{SNR}_{2 \times 1} = \frac{|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2}{\sigma^2} \langle x_q^2 \rangle = \frac{|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2}{2\sigma^2} P_T \quad (77)$$

Η περίπτωση του συστήματος 2×2 είναι ανάλογη. Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο δέκτες θα ισχύει

$$y_{11} = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + n_{11} \quad (78)$$

$$y_{21} = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + n_{21} \quad (79)$$

$$y_{12}^* = h_{12}^*x_1 - h_{11}^*x_2 + n_{12}^* \quad (80)$$

$$y_{22}^* = h_{22}^*x_1 - h_{21}^*x_2 + n_{22}^* \quad (81)$$

Σε μορφή πίνακα οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{12}^* \\ y_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* \\ h_{22}^* & -h_{21}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{12}^* \\ n_{22}^* \end{bmatrix} \quad (82)$$

ενώ ορίζουμε:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{12}^* \\ y_{22}^* \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* \\ h_{22}^* & -h_{21}^* \end{bmatrix} \quad (84)$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{12}^* \\ n_{22}^* \end{bmatrix} \quad (85)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\mathbf{M}^H \mathbf{M} = \begin{bmatrix} h_{11}^* & h_{21}^* & h_{12} & h_{22} \\ h_{12}^* & h_{22}^* & -h_{11} & -h_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{12}^* & -h_{11}^* \\ h_{22}^* & -h_{21}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |h|^2 & 0 \\ 0 & |h|^2 \end{bmatrix} \quad (86)$$

όπου

$$|h|^2 = |h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2 \quad (87)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τα μετασχηματισμένα σήματα \mathbf{z} σύμφωνα με την (70) και εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\mathbf{z} = h^2 \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (88)$$

ενώ:

$$\langle \mathbf{e}\mathbf{e}^H \rangle = \sigma^2 h^2 \mathbf{I}_2 \quad (89)$$

Επομένως στην περίπτωση του συστήματος 2×2 , το πηλίκιο σήμα προς θόρυβο είναι:

$$\text{SNR}_{2 \times 2} = \frac{h^2 \langle x_q^2 \rangle}{\sigma^2} = \frac{|h_{11}|^2 + |h_{12}|^2 + |h_{21}|^2 + |h_{22}|^2}{\sigma^2} \frac{P_T}{2} \quad (90)$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το SNR μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\text{SNR} = \frac{\|\mathbf{H}\|^2 P_T}{N \sigma^2} = \frac{\|\mathbf{H}\|^2}{N} \text{SNR}_{1 \times 1} \quad (91)$$

όπου με $\|\mathbf{H}\|^2$ έχουμε συμβολίσει την νόρμα κατά Frobenius του πίνακα με στοιχεία τους συντελεστές h_{pq} .

$$\|\mathbf{H}\|^2 = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N |h_{pq}|^2 \quad (92)$$

Η εξίσωση (91) είναι ένα γενικότερο αποτέλεσμα που ισχύει στην περίπτωση των ορθογωνίων κωδίκων χώρου/χρόνου και χρησιμοποιούνται N κεραίες εκπομπής και M κεραίες λήψης. Στην γενικότερη περίπτωση ο πίνακας του κώδικα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{N1} & \dots & s_{NN} \end{bmatrix} \quad (93)$$

όπου s_{pq} είναι το σύμβολο που μεταδίδεται την χρονική στιγμή q από την κεραία p . Οι ορθογώνιοι κωδικοί έχουν την ιδιότητα:

$$\mathbf{X}^H \mathbf{X} = c \mathbf{I}_N \quad (94)$$

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι στην (90) έχουμε υποθέσει ότι η ισχύς διαμοιράζεται στις δύο κεραίες εκπομπής. Επίσης στην περίπτωση όπου τα κέρδη των καναλιών είναι ίσα ($h_{pq}=h$) τα συστήματα 2×2 έχουν το διπλάσιο SNR από τα συστήματα 2×1 και 1×1 ,

$$\text{SNR}_{2 \times 2} = 2 \text{SNR}_{2 \times 1} = 2 \text{SNR}_{1 \times 1} = \frac{2|h_{11}|^2 P_T}{\sigma^2} \quad (95)$$

Η πιθανότητα σφάλματος εξαρτάται από τον τρόπο διαμόρφωσης. Στην περίπτωση του M -αδικού PSK που χρησιμοποιείται κωδικός Gray για την αντιστοίχιση των bit σε σύμβολα, η πιθανότητα σφάλματος bit P_b δίνεται από την σχέση [7]:

$$P_b \cong \frac{1}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{2 \text{SNR}} \sin \frac{\pi}{M}\right) \quad (96)$$

5.2 Συστήματα IM/DD με STBC

Η προηγούμενες σχέσεις θα πρέπει να τροποποιηθούν ώστε να ισχύουν στην περίπτωση των συστημάτων IM/DD. Όπως είδαμε και στην παράγραφο 4.1, οι συντελεστές h_{pq} στην περίπτωση αυτή μπορούν να γραφτούν σύμφωνα με την (47) ως εξής:

$$h_{pq} = \frac{P_T}{2} R c_{pq} \quad (97)$$

ενώ για να απλοποιήσουμε τις πράξεις μπορούμε να θέσουμε $\langle x_q^2 \rangle = 1$, οπότε το SNR μπορεί να γραφτεί:

$$\text{SNR}_{2 \times 1} = R^2 \frac{|c_{11}|^2}{\sigma^2} P_T^2 \quad (98)$$

$$\text{SNR}_{2 \times 1} = R^2 \frac{|c_{11}|^2 + |c_{12}|^2}{\sigma^2} \frac{P_T^2}{4} \quad (99)$$

$$\text{SNR}_{2 \times 2} = R^2 \frac{|c_{11}|^2 + |c_{12}|^2 + |c_{21}|^2 + |c_{22}|^2}{\sigma^2} \frac{P_T^2}{4} \quad (100)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις καθίσταται φανερό ότι η κωδικοποίηση Alamouti δεν συνεπάγεται μεγαλύτερο SNR από ότι στην περίπτωση του συστήματος 1×1 . Πράγματι αντικαθιστώντας $c_{pq} \cong 1$ θα έχουμε:

$$\text{SNR}_{2 \times 2} = \text{SNR}_{1 \times 1} = 2\text{SNR}_{2 \times 1} = R^2 \frac{|c_{11}|^2}{\sigma^2} P_T^2 \quad (101)$$

Δηλαδή εξαιτίας του γεγονότος ότι η οπτική ισχύς είναι ανάλογη των σημάτων x_q και όχι του $|x_q|^2$ το SNR στα συστήματα 2×1 είναι μικρότερο κατά 3dB από το SNR του συστήματος 1×1 ενώ το σύστημα 2×2 τελικά επιτυγχάνει το ίδιο SNR με το απλό σύστημα. Στη γενικότερη περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (91) και (92) αντικαθιστώντας του συντελεστές του καναλιού που δίνονται από την (97).

5.3 Σύμφωνα Ασύρματα Συστήματα με STBC

Στην περίπτωση των σύμφωνων ασύρματων συστημάτων 2×1 και 2×2 θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αντί της (97) την

$$h_{pq} = \sqrt{\frac{P_T c_{pq} P_{LO}}{2}} R \quad (102)$$

οπότε στην περίπτωση αυτή θα έχουμε:

$$\text{SNR}_{2 \times 1} = R^2 \frac{|c_{11}|}{\sigma^2} P_T P_{LO} \quad (103)$$

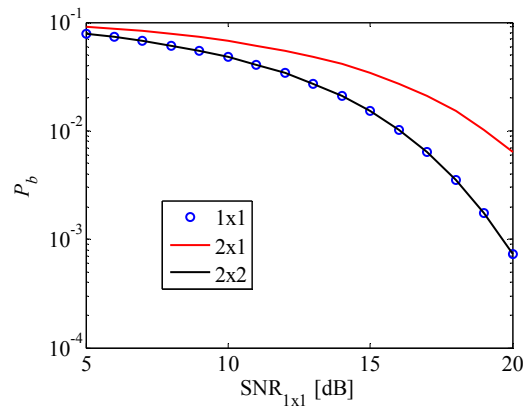
$$\text{SNR}_{2 \times 1} = R^2 \frac{|c_{11}| + |c_{12}|}{\sigma^2} \frac{P_T P_{LO}}{2} \quad (104)$$

$$\text{SNR}_{2 \times 2} = R^2 \frac{|c_{11}| + |c_{12}| + |c_{21}| + |c_{22}|}{\sigma^2} \frac{P_T P_{LO}}{2} \quad (105)$$

Στη γενικότερη περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (91) και (92) αντικαθιστώντας του συντελεστές του καναλιού που δίνονται από την (102). Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της σύμφωνης φάρασης και αν υποθέσουμε ότι κάθε δέκτης χρησιμοποιεί τοπικό ταλαντωτή με την ίδια ισχύ P_{LO} όπως και στην περίπτωση του συστήματος 1×1 το SNR είναι παρόμοιο με το SNR των κλασικών ασύρματων συστημάτων επειδή το φωτόρευμα στον δέκτη είναι ανάλογο του σήματος εκπομπής και όχι της ισχύς του.

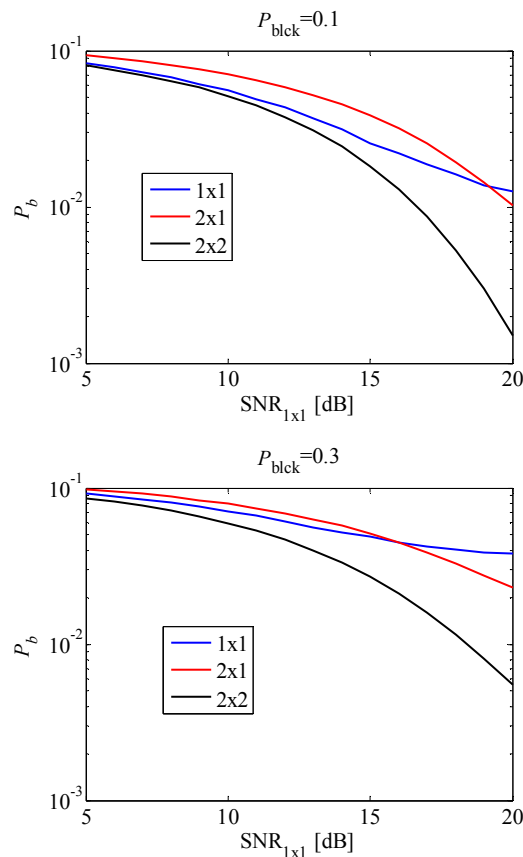
5.4 Επιδόσεις Συστημάτων IM/DD με STBC

Στην Εικόνα 15 έχουμε παραστήσει γραφικά την πιθανότητα σφάλματος bit για την περίπτωση της 16-PSK διαμόρφωσης για ένα σύστημα IM/DD 1×1 καθώς και για δύο συστήματα 2×1 και 2×2 που χρησιμοποιούν STBC. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα σφάλματος είναι μεγαλύτερη για το 2×1 δεδομένου ότι όπως είδαμε και στην ενότητα 5.2, το SNR για αυτό το σύστημα είναι μικρότερο.

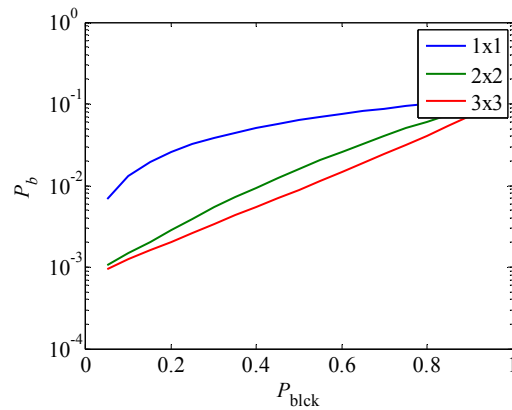


Εικόνα 15: Πιθανότητα σφάλματος για τα συστήματα IM/DD που χρησιμοποιούν διαμόρφωση PSK και στην περίπτωση των πολλαπλών πομπών STBC.

Στην Εικόνα 16 έχουμε παραστήσει γραφικά την πιθανότητα σφάλματος bit στην περίπτωση όπου οι επιμέρους συνδέσεις διακόπτονται με πιθανότητα $P_{\text{blk}}=0.1$ ή $P_{\text{blk}}=0.3$. Σε κάθε περίπτωση βλέπουμε ότι από μία τιμή του SNR και μετά, το σύστημα 2x1 είναι καλύτερο του 1x1 κάτι που υποδηλώνει ότι τελικά το σύστημα 2x1 υπερέρχει του 1x1. Σε κάθε περίπτωση το σύστημα 2x2 υπερτερεί των συστημάτων 1x1 και 2x1.



Εικόνα 16: Πιθανότητα σφάλματος για τα συστήματα IM/DD που χρησιμοποιούν διαμόρφωση PSK και στην περίπτωση των πολλαπλών πομπών STBC για δύο διαφορετικές πιθανότητες διακοπής της σύνδεσης.

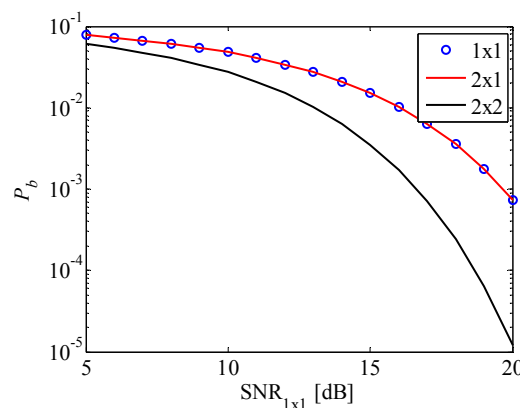


Εικόνα 17: Πιθανότητα σφάλματος για IM/DD ασύρματα συστήματα που χρησιμοποιούν διαμόρφωση 16-PSK 1×1, 2×1 και 2×2 για $\text{SNR}_{1 \times 1} = 20\text{dB}$

Στην Εικόνα 17 έχουμε παραστήσει γραφικά την πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με την πιθανότητα απώλειας σύνδεσης στην περίπτωση των IM/DD συστημάτων θεωρώντας ότι $\text{SNR}_{1 \times 1} = 20\text{dB}$. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα σφάλματος μειώνεται μονοτονικά με το P_{blk} σε αντίθεση με την χωρητικότητα του καναλιού στην Εικόνα 6.

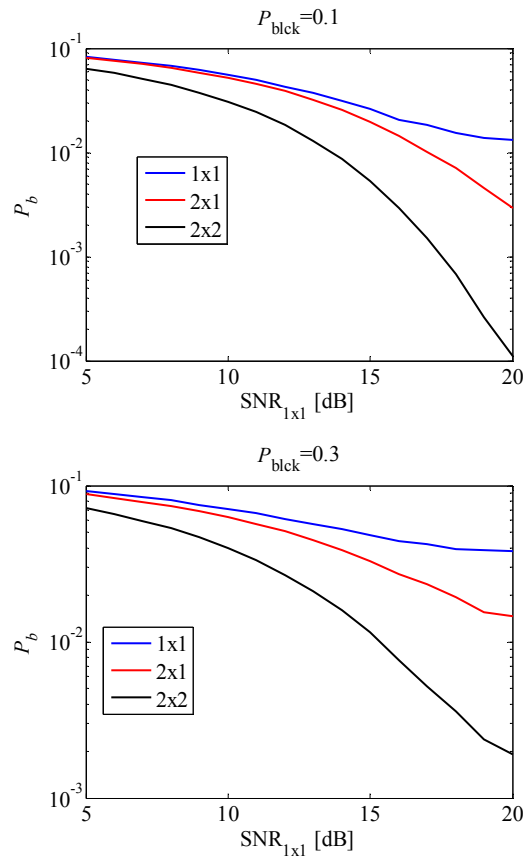
5.5 Επιδόσεις Συστημάτων Σύμφωνων Ασύρματων Συστημάτων με STBC

Στην Εικόνα 18 έχουμε παραστήσει γραφικά την πιθανότητα σφάλματος bit στην περίπτωση των ασύρματων συστημάτων που χρησιμοποιούν σύμφωνη φάραση με 16-PSK. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το σύστημα 2×1 ταυτίζεται με το 1×1 ενώ το 2×2 οδηγεί σε σημαντική βελτίωση της πιθανότητας σφάλματος για το ίδιο επίπεδο SNR.

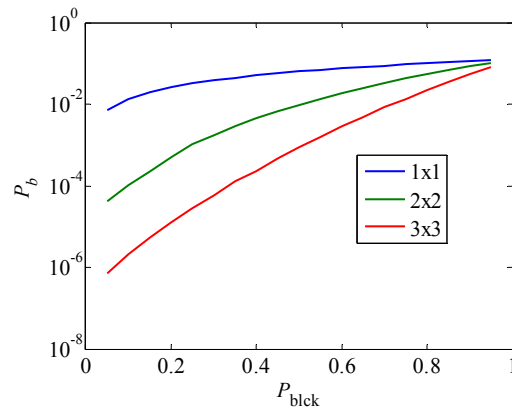


Εικόνα 18: Πιθανότητα σφάλματος για τα σύμφωνα ασύρματα συστήματα που χρησιμοποιούν διαμόρφωση PSK και στην περίπτωση των πολλαπλών πομπών STBC.

Στην Εικόνα 19 έχουμε και πάλι παραστήσει γραφικά την πιθανότητα σφάλματος bit στην περίπτωση όπου οι επιμέρους συνδέσεις διακόπτονται με πιθανότητα $P_{\text{blk}} = 0.1$ ή $P_{\text{blk}} = 0.3$. Βλέπουμε ότι για τη σύμφωνη λήψη, το σύστημα 2×1 υπερτερεί πάντα του 1×1, σε αντίθεση με την περίπτωση της άμεσης φάρασης που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα όπου αυτή την εν λόγω συμπεριφορά την είχαμε παρατηρήσει για μεγάλες τιμές του SNR. Παράλληλα το σύστημα 2×2 οδηγεί σε μία σαφή βελτίωση της πιθανότητας σφάλματος, μεγαλύτερη από αυτή που παρατηρήσαμε στα συστήματα IM/DD.



Εικόνα 19: Πιθανότητα σφάλματος για τα σύμφωνα ασύρματα συστήματα που χρησιμοποιούν διαμόρφωση PSK και στην περίπτωση των πολλαπλών πομπών STBC για δύο διαφορετικές πιθανότητες διακοπής της σύνδεσης.



Εικόνα 20: Πιθανότητα σφάλματος για τα σύμφωνα ασύρματα συστήματα που χρησιμοποιούν διαμόρφωση 16-PSK 1x1, 2x1 και 2x2 για $\text{SNR}_{1 \times 1} = 20\text{dB}$

Στην Εικόνα 20 έχουμε παραστήσει γραφικά την πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με την πιθανότητα απώλειας σύνδεσης στην περίπτωση των σύμφωνων ασύρματων συστημάτων θεωρώντας ότι $\text{SNR}_{1 \times 1} = 20\text{dB}$. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα σφάλματος μειώνεται μονοτονικά με το P_{block} σε αντίθεση με την χωρητικότητα του καναλιού στην Εικόνα 12.

6. Κώδικες Επανάληψης (Repetition Coding)

Μία εναλλακτική αξιοποίηση των πολλαπλών πομπών και δεκτών είναι οι επαναληπτικοί κώδικες (repetition coding). Στην περίπτωση αυτή όλοι οι πομποί μεταδίδουν το ίδιο σήμα οπότε ο πίνακας του κώδικα έχει ως εξής:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_N \end{bmatrix} \quad (106)$$

Προφανώς για τους επαναληπτικούς κώδικες δεν ισχύει η (94) οπότε δεν πρόκειται για ορθογώνια κωδικοποίηση. Στην περίπτωση της άμεσης φώρασης, το σήμα που λαμβάνουν οι δέκτες είναι:

$$y_q = \frac{P_T}{2} R s_p \sum_{p=1}^N c_{pq} + n_q \quad (107)$$

Εφόσον απουσία θορύβου, όλα τα σήματα λήψης είναι ανάλογα του σήματος που μεταδόθηκε, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για την αποκωδικοποίηση τα σήματα προστίθενται και επομένως,

$$y = \frac{P_T}{N} R s_p \sum_{q=1}^M \sum_{p=1}^N c_{pq} w_q + \sum_{q=1}^M n_q w_q \quad (108)$$

όπου τα βάρη w_q πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα ώστε να μεγιστοποιείται το πηλίκο σήμα προς θόρυβο. Η ισχύς του σήματος είναι ανάλογη του $|\sum_q w_q a_q|^2$ όπου $a_q = \sum_p c_{pq}$ ενώ η ισχύς του θορύβου είναι $\sigma^2 \sum_q |w_q|^2$ οπότε το πηλίκο σήμα προς θόρυβο θα είναι ανάλογο του

$$\frac{|\sum_q w_q a_q|^2}{\sum_q |w_q|^2} \quad (109)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Cauchy θα έχουμε

$$|\sum_q w_q a_q|^2 \leq \sum_q |w_q|^2 \sum_q |a_q|^2 \quad (110)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $w_q = a_q^*$. Επομένως το βέλτιστο πηλίκο σήματος προς θόρυβο θα είναι δίνεται από την σχέση:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{RC}} = \left(\frac{R P_T}{N}\right)^2 \sum_{q=1}^M \left| \sum_{p=1}^N c_{pq} \right|^2 \quad (111)$$

Όταν χρησιμοποιούμε σύμφωνη φώραση, η (111) γράφεται ως εξής:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{RC}} = \left(\frac{R P_T P_{LO}}{\sqrt{N}}\right)^2 \sum_{q=1}^M \left| \sum_{p=1}^N \sqrt{c_{pq}} e^{j\phi_{pq}} \right|^2 \quad (112)$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι δεδομένου ότι οι συντελεστές του καναλιού είναι πάντα θετικοί, $c_{pq} \geq 0$, στην περίπτωση των συστημάτων IM/DD θα έχουμε πάντα,

$$\left| \sum_{p=1}^N c_{pq} \right|^2 \geq \sum_{p=1}^N |c_{pq}|^2 \quad (113)$$

οπότε

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{RC}} = \left(\frac{R P_T}{N}\right)^2 \sum_{q=1}^M \left| \sum_{p=1}^N c_{pq} \right|^2 \geq \left(\frac{R P_T}{N}\right)^2 \sum_{q=1}^M \sum_{p=1}^N |c_{pq}|^2 = \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{OSTBC}} \quad (114)$$

Η (114) δείχνει ότι το πηλίκο σήμα προς θόρυβο στην περίπτωση της επαναληπτικής κωδικοποίησης είναι εν γένει μεγαλύτερο από ότι της κωδικοποίησης OSTBC. Ωστόσο για τα σύμφωνα ασύρματα συστήματα δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο ασφαλές συμπέρασμα καθότι η διαφοράς φάσης ϕ_{pq} παίζει σημαντικό ρόλο στην υπέρθεση των σημάτων και το πηλίκο σήμα προς θόρυβο παρουσιάζει έντονη εξάρτηση από αυτές

σύμφωνα με την (112) και οι συντελεστές του σύμφωνου ασύρματου καναλιού είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί και όχι θετικοί όπως στην περίπτωση του IM/DD.

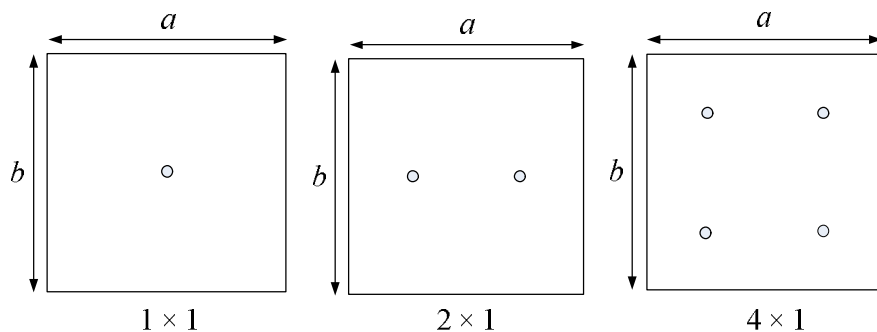
Η χωρητικότητα ενός συστήματος που χρησιμοποιεί κώδικα επανάληψης είναι

$$C_{RC} = \log_2 \left(1 + \left(\frac{S}{N} \right)_{RC} \right) \quad (115)$$

7. Επιδόσεις ενός ρεαλιστικού συστήματος.

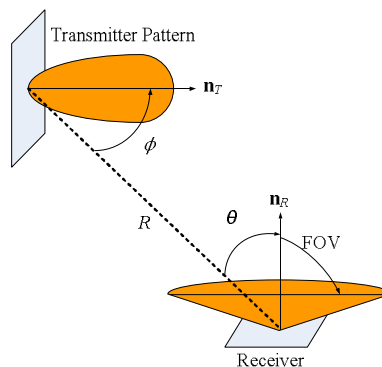
Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι οι συντελεστές του καναλιού ήταν ίσοι με την μονάδα. Στην παράγραφο αυτή θα διερευνήσουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση όπου θεωρούμε μία πραγματική αρχιτεκτονική συστήματος MIMO όπου οι πομποί είναι τοποθετημένοι σε συγκεκριμένες θέσεις μέσα στο δωμάτιο και οι δέκτες βρίσκονται πάνω στο τερματικό του χρήστη.

Για τους υπολογισμούς μας θεωρούμε αρχικά ένα δωμάτιο με διαστάσεις $8\text{m} \times 8\text{m} \times 3\text{m}$ και μελετούμε τις επιδόσεις τριών συστημάτων: α) 1×1 , β) 2×1 και γ) 4×1 με τις θέσεις των πομπών να φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 21: Διαφορετικές θέσεις των πομπών στο ταβάνι του δωματίου.

Στο σύστημα 1×1 ο πομπός τοποθετείται στο κέντρο του ταβανιού ενώ στο σύστημα 2×1 οι πομποί τοποθετούνται πάνω στην οριζόντια ευθεία που περνάει από το κέντρο του ταβανιού έτσι ώστε να απέχουν απόσταση ίση με το ήμισυ της διάστασης του δωματίου. Στο σύστημα 4×1 οι πομποί έχουν τοποθετηθεί πάνω στις διαγώνιους του δωματίου έτσι ώστε η μεταξύ τους ελάχιστη απόσταση στην κάθετη και την οριζόντια διεύθυνση να είναι ίση με το ήμισυ της διάστασης του δωματίου. Οι θέσεις των πομπών έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να είναι τα κέντρα ορθογώνιων N μικρο-κυβελών ίδιας επιφάνειας το σύνολο των οποίων καλύπτουν πλήρως όλο το δωμάτιο⁸.



Εικόνα 22: Βοηθητικό διάγραμμα για τον υπολογισμό του κέρδους του καναλιού [8].

⁸ Φυσικά αυτό δεν σημαίνει ότι υπάρχει κάλυψη σε κάθε σημείο του δωματίου. Για να αποφανθούμε για αυτό θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και το διάγραμμα ακτινοβολίας των πομπών.

Για να υπολογίσουμε την χωρητικότητα των συστημάτων θεωρούμε ότι οι πομποί εκπέμπουν με ένα Lambertian διάγραμμα ακτινοβολίας. Σύμφωνα και με όσα είχαμε δει στο Π1.1, η ισχύς που φτάνει στο δέκτη υπολογίζεται βάση της γεωμετρίας που δείχνουμε στην Εικόνα 22 και δίνεται από την σχέση [9]:

$$P_{pq} = \frac{P_T}{N} \frac{A_q}{\pi R_{pq}^2} \cos \phi_{pq} \cos \theta_{pq} \text{rect} \left(\frac{\theta_{pq}}{\text{FOV}_q} \right) \quad (116)$$

όπου:

$$R_{pq} = |\mathbf{r}_T^p - \mathbf{r}_R^q| \quad (117)$$

$$\cos \theta_{pq} = \frac{\mathbf{n}_R^q \cdot (\mathbf{r}_T^p - \mathbf{r}_R^q)}{R_{pq}} \quad (118)$$

$$\cos \phi_{pq} = \frac{\mathbf{n}_T^p \cdot (\mathbf{r}_R^q - \mathbf{r}_T^p)}{R_{pq}} \quad (119)$$

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases} \quad (120)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις τα μεγέθη έχουν ως εξής:

- P_{pq} είναι η οπτική ισχύς που φτάνει στον δέκτη q από τον πομπό p .
- R_{pq} είναι η απόσταση που χωρίζει τον δέκτη q από τον πομπό p .
- θ_{pq} είναι η γωνία που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n}_R^q στο δέκτη q με την ευθεία που ενώνει τον δέκτη q και τον πομπό p .
- ϕ_{pq} είναι η γωνία που σχηματίζει το κάθετο διάνυσμα \mathbf{n}_T^p στον πομπό p με την ευθεία που ενώνει τον δέκτη q και τον πομπό p .
- \mathbf{r}_T^p είναι η θέση του πομπού p στον τρισδιάστατο χώρο.
- \mathbf{r}_R^q είναι η θέση του δέκτη q στον τρισδιάστατο χώρο.
- FOV_q είναι το πεδίο θέασης (field-of-view του δέκτη q).
- A_q είναι η ενεργός επιφάνεια του δέκτη q

Δεδομένης της ισχύος P_{pq} η οποία λαμβάνεται στο δέκτη, είναι εύκολο να δούμε ότι στην περίπτωση των συστημάτων IM/DD θα έχουμε σύμφωνα με την (47) ότι οι συντελεστές του καναλιού θα δίνονται από την σχέση:

$$h_{pq} = RP_{pq} = R \frac{P_T}{N} \frac{A_q}{\pi R_{pq}^2} \cos \phi_{pq} \cos \theta_{pq} \text{rect} \left(\frac{\theta_{pq}}{\text{FOV}_q} \right) \quad (121)$$

ενώ στην περίπτωση της σύμφωνης φάρασης θα έχουμε [10]:

$$h_{pq} = R \sqrt{P_{LO} P_{pq}} = R \left[\frac{P_T P_{LO}}{N} \frac{A_q}{\pi R_{pq}^2} \cos \phi_{pq} \cos \theta_{pq} \right]^{1/2} \text{rect} \left(\frac{\theta_{pq}}{\text{FOV}_q} \right) \quad (122)$$

Ο Πίνακας 1 συνοψίζει τα χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούμε κατά τον υπολογισμό των επιδόσεων των MIMO συστημάτων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περίπτωση που εξετάζουμε μία πιο ρεαλιστική αρχιτεκτονική παρουσιάζει το πηλίκo προς θόρυβο SNR_T στον πομπό του συστήματος 1×1 και το οποίο δίνεται από την σχέση,

$$\text{SNR}_T = \frac{R^2 P_T^2}{\sigma^2} \quad (123)$$

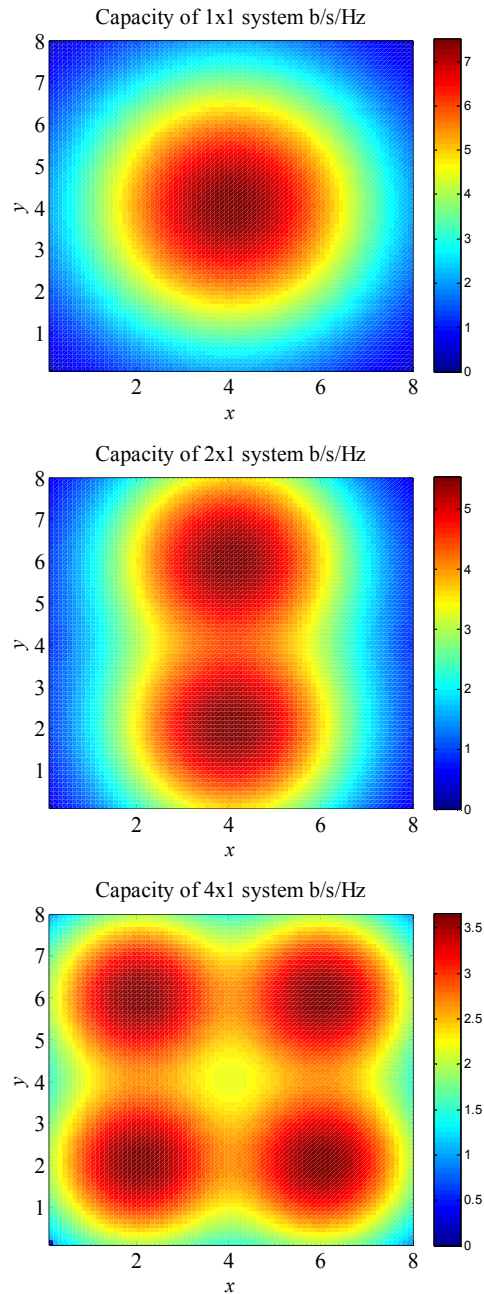
Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά των MIMO συστημάτων υπό διερεύνηση

Χαρακτηριστικό	Τιμή	
Διαστάσεις δωματίου	$a=8\text{m}, b=8\text{m}, h=3\text{m}$	
Θέση πομπών	Σύστημα $1 \times M$	
	$\mathbf{r}_T^1 = \left[\frac{1}{2}a \quad \frac{1}{2}b \quad h \right]$	
	Σύστημα $2 \times M$	
	$\mathbf{r}_T^1 = \left[\frac{1}{4}a \quad \frac{1}{2}b \quad h \right]$	
	$\mathbf{r}_T^2 = \left[\frac{3}{4}a \quad \frac{1}{2}b \quad h \right]$	
	Σύστημα $4 \times M$	
	$\mathbf{r}_T^1 = \left[\frac{1}{4}a \quad \frac{1}{4}b \quad h \right]$	
	$\mathbf{r}_T^2 = \left[\frac{3}{4}a \quad \frac{1}{4}b \quad h \right]$	
	$\mathbf{r}_T^3 = \left[\frac{1}{4}a \quad \frac{3}{4}b \quad h \right]$	
	$\mathbf{r}_T^4 = \left[\frac{3}{4}a \quad \frac{3}{4}b \quad h \right]$	
	Απόσταση μεταξύ δεκτών (στην περίπτωση $M>1$)	$D=10\text{cm}$
	Τάξη διαγράμματος ακτινοβολίας	$n_{\text{lamb}}=1$
Πεδίο θέασης δεκτών	$\text{FOV}_q=90^\circ$	
Ισχύς εκπομπής του συστήματος 1×1	Σύστημα IM/DD	
	$P_T=20\text{mW}$	
	Σύστημα με σύμφωνη φάραση	
	$P_T=20\text{mW}$	
Ισχύς τοπικού ταλαντωτή P_{LO}	$P_T=10\text{mW}$	
Προσανατολισμός δεκτών	$\mathbf{n}_R^g = [0 \quad 0 \quad 1]^H$	
Προσανατολισμός πομπών	$\mathbf{n}_T^g = [0 \quad 0 \quad -1]^H$	
Ενεργός επιφάνεια δεκτών	$A_g=1\text{cm}^2$	
Επίπεδο δέκτη	$z=0.8\text{m}$	
Ισχύς προσθετικού θορύβου	$\sigma^2=10^{-13}\text{A}^2$	
Αποκρισιμότητα δέκτη	$R=0.6\text{A/W}$	
Πηλίκιο σήμα-προς-θόρυβο του συστήματος 1×1 στον πομπό στην περίπτωση του IM/DD	$\text{SNR}_T=92\text{dB}$	
Πηλίκιο σήμα-προς-θόρυβο του συστήματος 1×1 στον πομπό στην περίπτωση του σύμφωνου συστήματος	$\text{SNR}_T=92\text{dB}$	

Το εν λόγω SNR σχετίζεται με την ποιότητα επικοινωνίας που θα είχαμε αν τοποθετούσαμε τον δέκτη άμεσης φάρασης στον πομπό 1×1 . Χρησιμοποιούμε το εν λόγω μέγεθος επειδή είναι ανεξάρτητο της οπτικής διαδρομής και της εξασθένισης που εισάγει το οπτικό κανάλι.

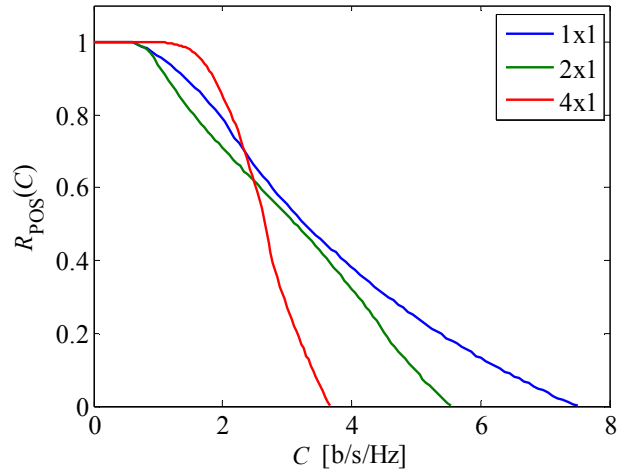
7.1 Συστήματα άμεσης φάρασης με ένα δέκτη

Στην Εικόνα 23 έχουμε παραστήσει γραφικά την χωρητικότητα που υπολογίζουμε για τα συστήματα 1×1 , 2×1 και 4×1 στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούμε IM/DD λαμβάνοντας υπόψη τις παραμέτρους που αναφέρει ο Πίνακας 1.



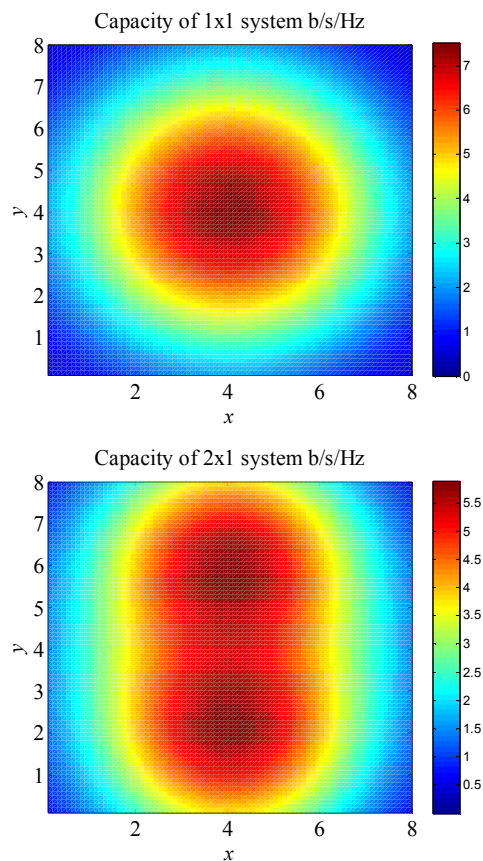
Εικόνα 23: Χωρητικότητα των συστημάτων IM/DD 1×1 , 2×1 και 4×1 .

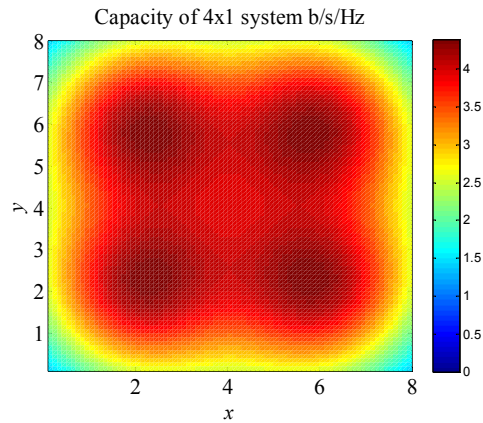
Από την Εικόνα 23 προκύπτει ότι αυξάνοντας το πλήθος των πομπών, η μέγιστη χωρητικότητα ελαττώνεται, ωστόσο βελτιώνεται η ομοιομορφία των τιμών της χωρητικότητας στα διάφορα σημεία του δωματίου. Αυτό γίνεται ιδιαίτερα εμφανές για το σύστημα 4×1 όπου έχουμε αρκετές τιμές χωρητικότητας κοντά στο μέγιστο όπως δείχνει και το τελευταίο σχήμα στην Εικόνα 23.



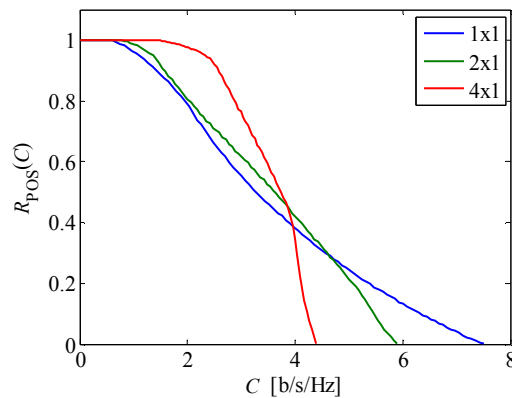
Εικόνα 24: Κάλυψη των συστημάτων IM/DD 1×1 , 2×1 και 4×1

Στην Εικόνα 24 έχουμε παραστήσει γραφικά την κάλυψη των συστημάτων όπως αυτή εκφράζεται από την συνάρτηση $R_{\text{POS}}(C)$ που αντιστοιχεί στο ποσοστό των θέσεων μέσα στο δωμάτιο στις οποίες η χωρητικότητα είναι μεγαλύτερη από C . Παρατηρούμε ότι ενώ στο σύστημα 1×1 και 2×1 οι τιμές της R_{POS} καλύπτουν ένα αρκετά μεγάλο διάστημα τιμών του C , για το σύστημα 4×1 σχεδόν όλες θέσεις στο δωμάτιο που χαρακτηρίζονται από χωρητικότητες της τάξης του $C \cong 1.5 \text{ b/s/Hz}$. Επομένως, όπως άλλωστε είναι και αναμενόμενο, η χρήση πολλαπλών πομπών μειώνει μεν την μέγιστη χωρητικότητα που μπορεί να πετύχει το σύστημα, ωστόσο βελτιώνει την κάλυψη του συστήματος.





Εικόνα 25: Χωρητικότητα των συστημάτων 1×1 , 2×1 και 4×1 που χρησιμοποιούν επαναληπτικό κώδικα.



Εικόνα 26: Κάλυψη των συστημάτων 1×1 , 2×1 και 4×1 που χρησιμοποιούν επαναληπτικό κώδικα.

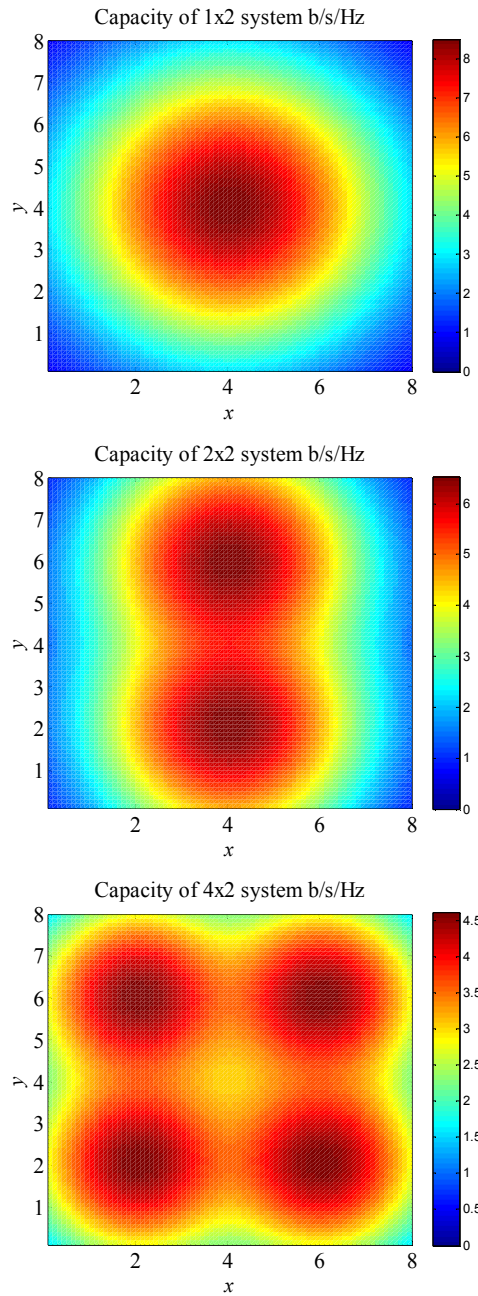
Στην Εικόνα 25 δείχνουμε την χωρητικότητα του συστήματος που χρησιμοποιεί επαναληπτικό κώδικα και η οποία υπολογίζεται βάσει της (115) ενώ στην Εικόνα 26 έχουμε παραστήσει την κάλυψη του. Συγκρίνοντας τα εν λόγω σχήματα με τις επιδόσεις του συστήματος MIMO που δεν χρησιμοποιεί επαναληπτικό κώδικα, συμπεραίνουμε ότι η επαναληπτική κωδικοποίηση υπερτερεί ειδικά στην περίπτωση του 4×1 , όπου η $R_{\text{pos}}(C)$ εκτείνεται σε μεγαλύτερες τιμές χωρητικότητας. Όπως αναμέναμε οι επιδόσεις για το σύστημα 1×1 είναι οι ίδιες για το σύστημα MIMO και για το σύστημα επαναληπτικής κωδικοποίησης. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το SNR είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις.

7.2 Συστήματα με πολλαπλούς δέκτες

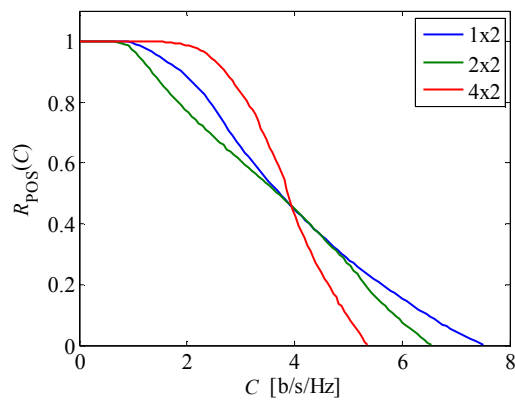
Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε συστήματα τα οποία χρησιμοποιούν δύο δέκτες οι οποίοι απέχουν απόσταση ίση με $D=10\text{cm}$ στην διεύθυνση του x άξονα. Η εν λόγω απόσταση αντιστοιχεί σε μία τυπική απόσταση στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν οι δέκτες σε ένα σχετικά μικρό σχετικά τερματικό (μία κάρτα USB stick ενός υπολογιστή).

Στην Εικόνα 27 έχουμε παραστήσει γραφικά την χωρητικότητα που επιτυγχάνουν τα MIMO συστήματα 1×2 , 2×2 και 4×2 . Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των συστημάτων 4×2 και 4×1 παρατηρούμε ότι η χρήση πολλαπλών δεκτών βελτιώνει τις επιδόσεις όταν χρησιμοποιούνται και πολλοί πομποί. Αυτό επιβεβαιώνεται και στην Εικόνα 28 όπου έχουμε παραστήσει την συνάρτηση $R_{\text{pos}}(C)$ η οποία όπως συζητήσαμε και προηγουμένως συνδέεται άμεσα με την κάλυψη του συστήματος.

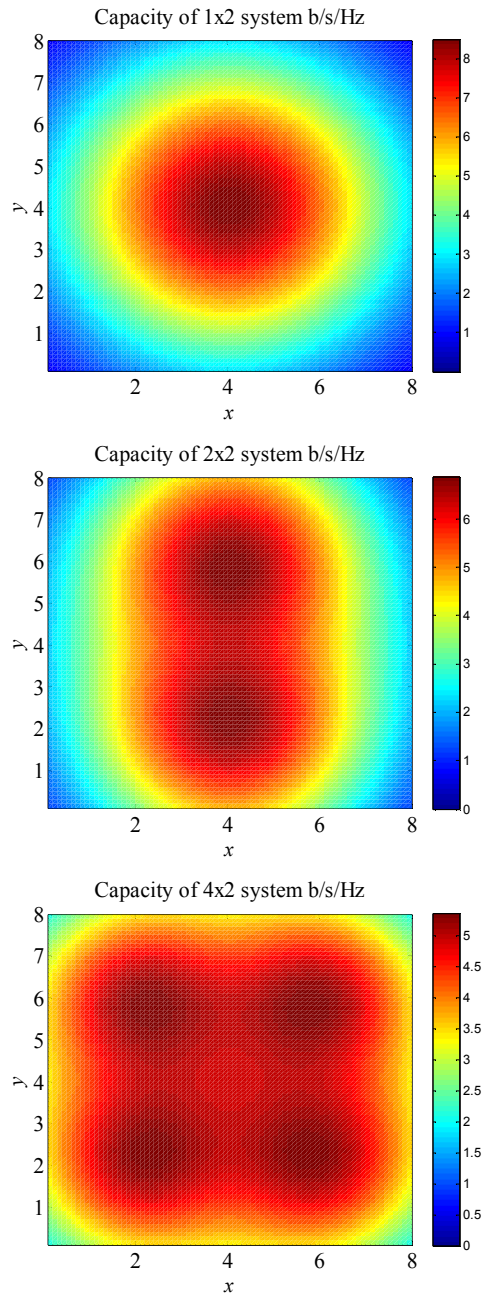
Παρόμοια συμπεράσματα συνάγονται και στην περίπτωση Εικόνα 29 όπου έχουμε παραστήσει γραφικά την χωρητικότητα του συστήματος που χρησιμοποιεί επαναληπτική κωδικοποίηση και στην Εικόνα 30 όπου παρουσιάζουμε την συνάρτηση κάλυψης του συστήματος.



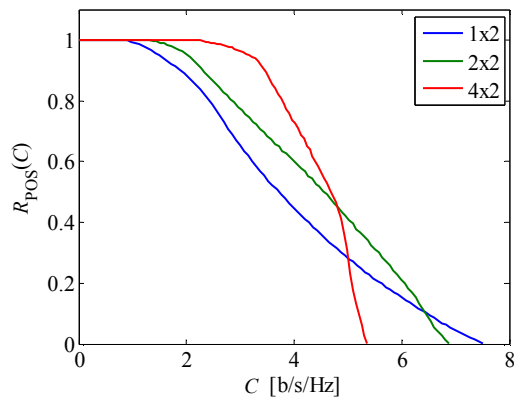
Εικόνα 27: Χωρητικότητα των συστημάτων 1×2 , 2×2 και 4×2 .



Εικόνα 28: Κάλυψη των συστημάτων 1×2 , 2×2 και 4×2 .



Εικόνα 29: Χωρητικότητα των συστημάτων 1×2 , 2×2 και 4×2 που χρησιμοποιούν επαναληπτικό κώδικα.

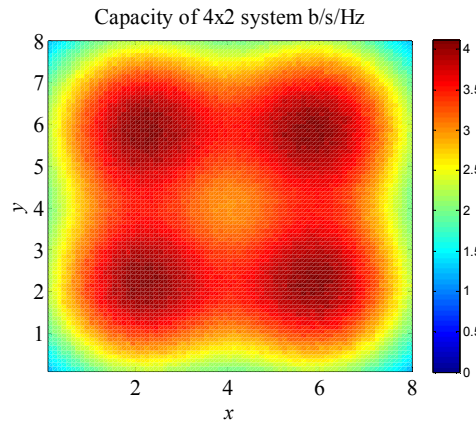


Εικόνα 30: Κάλυψη των συστημάτων 1×2 , 2×2 και 4×2 που χρησιμοποιούν επαναληπτικό κώδικα.

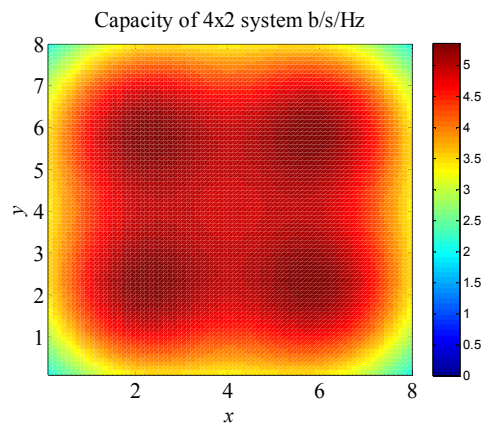
Παρατηρούμε πως για ακόμα μία φορά, τα απλά συστήματα με επαναληπτικό κώδικα υπερτερούν των MIMO συστημάτων και πως το καλύτερο σύστημα IM/DD ως προς την κάλυψη είναι το 4×2 όπου η μεγάλη πλειοψηφία των πιθανών θέσεων του δέκτη ($>80\%$) επιτυγχάνουν χωρητικότητα της τάξης των 4 bit/s/Hz.

7.3 Επίδραση των εμποδίων

Στην Εικόνα 31 και στην Εικόνα 32 έχουμε παραστήσει γραφικά την χωρητικότητα ενός 4×2 στην περίπτωση όπου χρησιμοποιούμε MIMO τεχνικές και επαναληπτική κωδικοποίηση αντίστοιχα και όπου έχουμε θεωρήσει ότι η πιθανότητα διακοπής μίας σύνδεσης είναι $P_{\text{blk}}=0.3$.



Εικόνα 31: Χωρητικότητα του MIMO συστήματος 4×2 στην περίπτωση όπου η πιθανότητα διακοπής μίας σύνδεσης είναι 30%



Εικόνα 32: Χωρητικότητα του συστήματος 4×2 με επαναληπτικό κώδικα στην περίπτωση όπου η πιθανότητα διακοπής μίας σύνδεσης είναι 30%

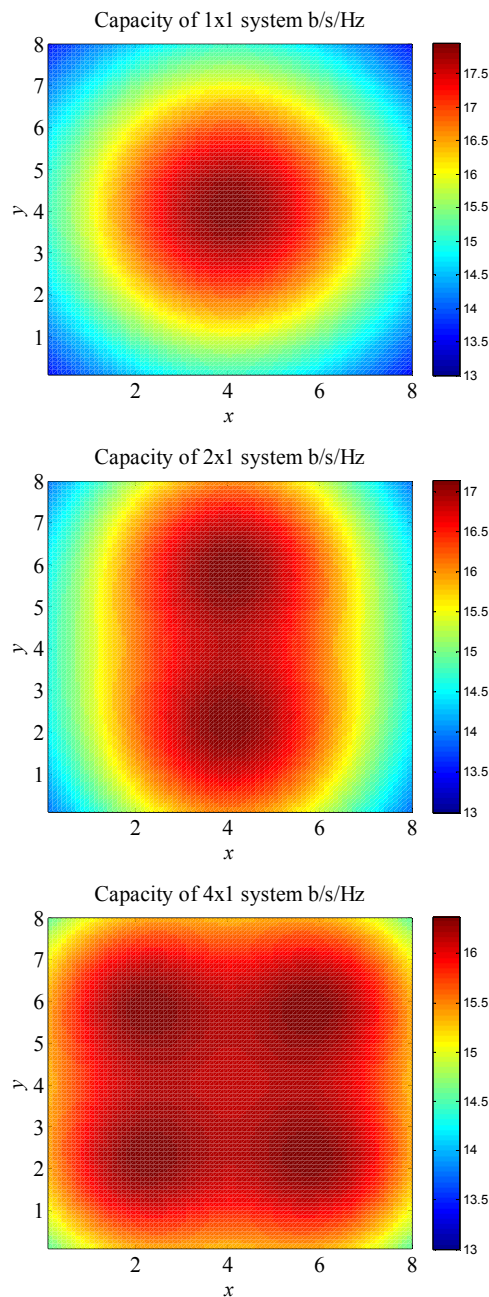
Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με την θεωρητική περίπτωση στην Εικόνα 6 όπου όλοι οι συντελεστές του πίνακα του καναλιού είναι ίσοι με μονάδα αν δεν υπάρχει διακοπή της σύνδεσης, στο πιο ρεαλιστικό σενάριο όπου έχουμε λάβει υπόψη μας το ακριβές κέρδος του καναλιού η χωρητικότητα του καναλιού είναι μικρότερη όσο αυξάνει η πιθανότητα P_{blk} . Αυτό στην περίπτωση των MIMO συστημάτων οφείλεται στο γεγονός ότι η φασματική δομή (δηλαδή η κατανομή των ιδιοτιμών) του πίνακα \mathbf{H} όπου έχει στοιχεία παντού ίσα με 1 είναι πολύ συγκεκριμένη και ο μηδενισμός ορισμένων εκ των στοιχείων του \mathbf{H} μπορεί να οδηγήσει σε μεγαλύτερη χωρητικότητα. Ωστόσο, αυτό μπορεί να μην ισχύει όταν ο πίνακας δεν έχει αυτή την ειδική μορφή κάτι που φαίνεται και από τις τιμές της χωρητικότητας στην Εικόνα 31 που είναι εν τέλει μικρότερες από αυτές στην Εικόνα 27. Αυτό οφείλεται στο ότι ο μηδενισμός ορισμένων εκ των στοιχείων του \mathbf{H} στην περίπτωση αυτή τελικά δεν οδηγεί σε αύξηση της χωρητικότητας.

Παρόμοια συμπεράσματα ισχύουν και για τα συστήματα που χρησιμοποιούν επαναληπτική κωδικοποίηση όπως φαίνεται από την σύγκριση της χωρητικότητας στην Εικόνα 32 με την χωρητικότητα του συστήματος στην Εικόνα 29. Η αιτία της μείωσης της απόδοσης για τα συστήματα του επαναληπτικού κώδικα είναι πιο προφανής καθότι δεν υπεισέρχονται στον υπολογισμό της χωρητικότητας καθόλου οι φασματικές ιδιότητες

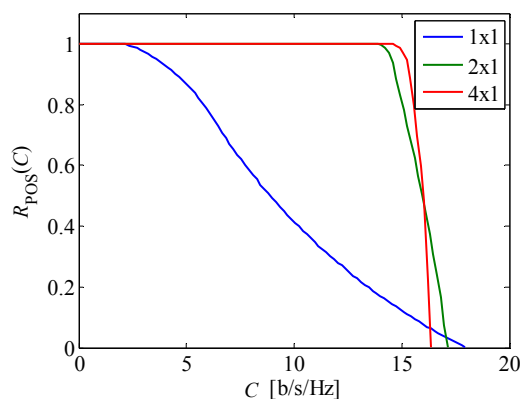
του \mathbf{H} καθώς το πηλίκο σήμα προς θόρυβο όπως καθορίζεται από την (111) από την οποία καθίσταται φανερό ότι η επιμέρους διακοπή ορισμένων συνδέσεων απλά θα οδηγήσει σε μείωση του SNR_{RC} που με την σειρά της θα σημάνει μείωση της χωρητικότητας του συστήματος.

7.4 Σύμφωνη Φώραση

Οι τελικοί υπολογισμοί του παραδοτέου αυτού αφορούν ένα σύστημα που χρησιμοποιεί σύμφωνη φώραση. Θεωρούμε τις παραμέτρους του συστήματος που δείχνει ο Πίνακας 1. Στα συστήματα αυτά θεωρούμε μόνο την περίπτωση $M \times 1$ καθότι όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 4.3 τα σύμφωνα MIMO συστήματα απαιτούν πολλαπλά στοιχεία διόρθωση φάσης και επομένως η χρήση πολλαπλών δεκτών καθιστά ακόμα πιο πολύπλοκη την υλοποίησή τους. Επίσης όπως εξηγήσαμε και στην ενότητα 6 οι κώδικες επανάληψης ενδεχομένως να μην είναι αποτελεσματικοί στην περίπτωση της σύμφωνης φώρασης.



Εικόνα 33: Χωρητικότητα του MIMO σύμφωνου MIMO συστήματος $M \times 1$.



Εικόνα 34: Κάλυψη των συστημάτων 1×1 , 2×1 και 4×1 στην περίπτωση της σύμφωνης φώρασης

Στην Εικόνα 33 παρουσιάζουμε την χωρητικότητα των σύμφωνων MIMO συστημάτων 1×1 , 2×1 και 4×1 ενώ η συνάρτηση κάλυψης παρουσιάζεται στην Εικόνα 34. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα της άμεσης φώρασης παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα του συστήματος εμφανίζεται σαφώς αυξημένη εξαιτίας της σύμφωνης φώρασης και του μεγαλύτερου πηλίκου σήμα προς θόρυβο στο δέκτη εξαιτίας του τοπικού ταλαντωτή. Επίσης η κάλυψη του συστήματος 4×1 είναι άριστη αφού η μεγάλη πλειοψηφία των τιμών της χωρητικότητας είναι περίπου 15 bit/s/Hz , κοντά δηλαδή στο μέγιστο του 1×1 το οποίο όμως παρουσιάζει αυτή την χωρητικότητα σε λίγες θέσεις μέσα στο δωμάτιο.

8. Συμπεράσματα

Στο παραδοτέο αυτό αναλύσαμε τις επιδόσεις των MIMO τεχνικών στα συστήματα σύμφωνης φώρασης έχοντας και ως αναφορά τα συστήματα άμεσης φώρασης. Πρόεκυψαν μία σειρά πολύ ενδιαφερόντων αποτελεσμάτων που συνοψίζονται παρακάτω:

- Στα συστήματα άμεσης φώρασης, οι επαναληπτικοί κώδικες είναι μακράν η καλύτερη και απλούστερη τεχνική για να πετύχουμε αύξηση της χωρητικότητας και προστασία από απώλεια σύνδεσης λόγω εμποδίων.
- Στα συστήματα σύμφωνης φώρασης, η αξία της επαναληπτικής κωδικοποίησης φαίνεται να τίθεται εν αμφιβολή καθώς παίζουν πλέον ρόλο και οι φάσεις των συντελεστών του καναλιού σε αντίθεση με τα συστήματα άμεσης φώρασης όπου οι εν λόγω συντελεστές είναι πάντα θετικοί.
- Οι τεχνικές MIMO συμπεριλαμβανομένης και της επαναληπτικής κωδικοποίησης μειώνουν σημαντικά την μέγιστη τιμή της χωρητικότητας στα συστήματα IM/DD, ωστόσο βελτιώνουν την κάλυψη του συστήματος. Σε ένα δεδομένο δωμάτιο η χρήση MIMO τεχνικών έχει ως αποτέλεσμα την μικρότερη διακύμανση των τιμών της χωρητικότητας του δέκτη από σημείο σε σημείο με αποτέλεσμα πιο ομοιόμορφες επιδόσεις σε όλες τις πιθανές θέσεις του τερματικού του χρήστη.
- Στα συστήματα σύμφωνης φώρασης, οι τεχνικές MIMO είναι ακόμα πιο αποτελεσματικές εφόσον είναι σε θέση να εγγυηθούν χωρητικότητα ίση σχεδόν με την μέγιστη σχεδόν χωρητικότητα ενός συστήματος 1×1 στην μεγάλη πλειοψηφία των θέσεων του δέκτη.
- Η υλοποίηση MIMO τεχνικών στην περίπτωση της σύμφωνης φώρασης προϋποθέτει κάποιου είδους διόρθωση φάσης που μπορεί σημαντικά να υπονομεύσει την πρακτική διείσδυση τέτοιων συστημάτων στο άμεσο μέλλον. Ωστόσο η αύξηση της χωρητικότητας σε σχέση με τα αντίστοιχα συστήματα άμεσης φώρασης είναι τρομακτική τόσο στην MIMO όσο και στην 1×1 περίπτωση.
- Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου όλοι οι συντελεστές του πίνακα του καναλιού είναι όλοι ίδιοι. Τότε δείξαμε ότι η χωρητικότητα του συστήματος αυξάνει με την εσκεμμένη παρεμπόδιση ορισμένων εκ των ζεύξεων του συστήματος. Σε ένα ωστόσο τυπικό σενάριο εσωτερικού χώρου οι συντελεστές του καναλιού διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους και επομένως δεν μπορούμε να επιτύχουμε αύξηση της χωρητικότητας με αυτό τον τρόπο. Είναι ενδιαφέρον ωστόσο να διερευνηθεί αυτό το φαινόμενο στην περίπτωση ζεύξεων εξωτερικού χώρου όπου οι

αποστάσεις είναι μεγαλύτερες και η συνθήκη αυτή μπορεί να πληρείται πιο εύκολα. Τυπικές εφαρμογές που χρησιμοποιούνται τα τελευταία συστήματα είναι οι ζεύξεις στο δίκτυο πρόσβασης [11], οι δορυφορικές ζεύξεις [12] και οι ζεύξεις μεταξύ πλατφόρμων υψηλού ύψους [13] (high amplitude platforms – HAP).

9. Αναφορές

- [1] Foschini, Jr., G. J. "Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas", Bell Labs Tech. Journal, 1:41–59 (1996).
- [2] Telatar, I. E. "Capacity of multi-antenna Gaussian channels", European Transaction on Telecommunications, 10(6):585–595 (1999).
- [3] Oestges C., Clerckx B. "MIMO Wireless Communications" (Academic Press, London, first edition 2007).
- [4] C. E. Shannon "Communication in the presence of noise" (PDF). Proc. Institute of Radio Engineers 37 (1): 10–21 (1949).
- [5] J. B. Carruthers and J. M. Kahn, "Modeling of Nondirected Wireless Infrared Channels", IEEE Trans. on Commun., vol. 45, no. 10, pp. 1260-1268, October 1997.
- [6] Larsson E.G. and Stoica P., 'Space-Time Block Coding for Wireless Communications' (Cambridge University Press New York, NY 2003).
- [7] Proakis J.G., Salehi M., "Communication Systems Engineering", Prentice Hall, 2nd edition (2001).
- [8] Γεωργία Ντόγαρη, "Μελέτη ασύρματων οπτικών συστημάτων για την υλοποίηση ευρυζωνικών δικτύων εσωτερικού χώρου", διδακτορική διατριβή Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (2011).
- [9] J.M. Kahn and J. R. Barry, "Wireless Infrared Communications", Proc. of the IEEE, vol. 85, pp. 265-298, February 1997.
- [10] G. Ntogari, T. Kamalakis, T. Sphicopoulos, 'Analysis of indoor multiple-input multiple-output coherent optical wireless systems', Journal of Lightwave Technology, 30 (3), art. no. 6084693, pp. 317-324 (2012).
- [11] Rokkas T., Kamalakis T., Katsianis D., Varoutas D., Sphicopoulos T., 'Business prospects of wide-scale deployment of free space optical technology as a last-mile solution: a techno-economic evaluation', J. Opt. Netw. vol. 6, 2007, pp. 860-870, dx.doi.org/10.1364/JON.6.000860
- [12] Toyoshima M., 'Trends in satellite communications and the role of optical free-space communications', J. Opt. Netw. vol. 4, 2005, pp. 300-311, dx.doi.org/10.1364/JON.4.000300
- [13] Fidler, F.; Knapek, M.; Horwath, J.; Leeb, W.R., 'Optical Communications for High-Altitude Platforms', IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, vol.16, no.5, pp.1058-1070, Sept.-Oct. 2010, doi: 10.1109/JSTQE.2010.2047382.